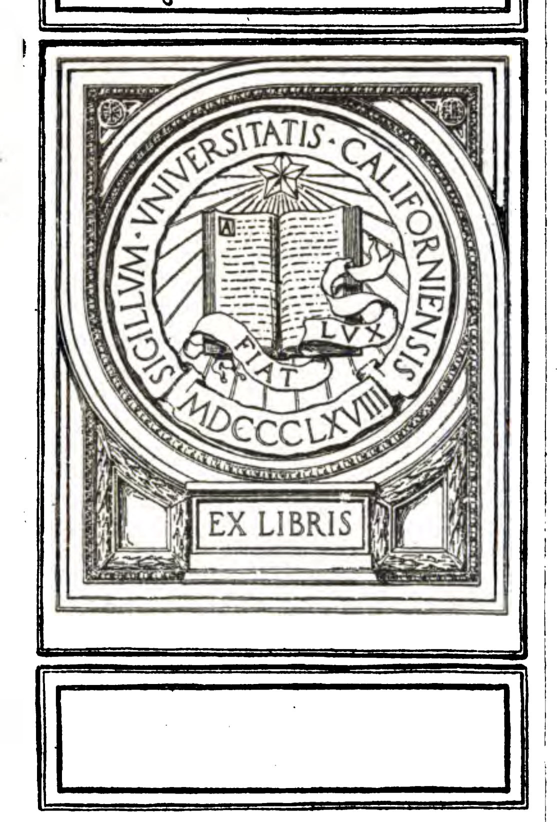

SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
LVX
FIAT
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS



Sistema de Acotaciones.

(1.ª parte.)

Sistema de Acotaciones.

Complemento á la Geometría Descriptiva

(1.ª parte)

por

D. Lorenzo Gallego Carranza

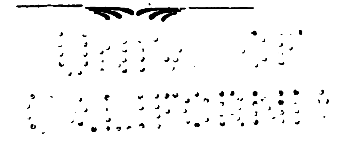
Coronel de Ingenieros retirado

Profesor que ha sido de la Academia de Ingenieros y de la General Militar.

OBRA PREMIADA

y elegida de texto por Real orden, en el Concurso de Obras celebrado por la Dirección de Instrucción Militar, y premiada con Medalla de Oro de 1.ª clase en la Exposición Universal de Barcelona.

Séptima edición.



TOLEDO
IMPRENTA Y LIBRERÍA DE LA VIUDA É HIJOS DE J. PELÁEZ
COMERCIO 55, Y LUCIO, 8
1912

Madrid 26 Enero 1913
Al Sr D. J. Cebrián, como recuerdo de su afmo amigo y compañero El Autor

ADVERTENCIA

Esta obra consta de dos partes.

La 1.ª se halla de texto en todas las Academias militares de España y en algunas civiles. Escrita con arreglo al programa de esta asignatura en la extinguida Academia General Militar, en la cual no se estudiaba la parte de Geometría descriptiva referente á planos tangentes y rasantes á las superficies irregulares, se limita á hacer uso del método de los perfiles para resolver un gran número de problemas de aplicación á la Topografía, y á la desenfilada de las obras de Fortificación de Campaña.

La 2.ª parte, escrita muy posteriormente para completar el estudio de esta asignatura en las Academias de aplicación de Artillería, Ingenieros y Escuela Superior de Guerra, se aprovecha del método rápido y práctico de los planos tangentes y rasantes á las superficies irregulares, para resolver con gran facilidad los problemas que se pueden presentar en la desenfilada, tanto de las obras de Fortificación de Campaña, como de las de la permanente.

Los que hayan hecho el estudio preliminar del método empleado por la Geometría descriptiva para la representación de los Cuerpos, mediante las proyecciones sobre dos ó más planos, observarán, al estudiar en este libro otro de los métodos de que dicha ciencia se vale para la representación por las acotaciones, que en el desarrollo de este sistema se ha seguido el mismo orden que en el primero, resultando mucho más sencillo.

Los que, sin conocer el método de representación por las proyecciones, empiecen el estudio de la Geometría descriptiva por el Método de las Acotaciones, no podrán hallar dificultad de ninguna clase, dada la sencillez del sistema.

Esta edición no difiere de las anteriores sino en unas ligerísimas variaciones en el texto, que no alteran en nada la índole de la obra, y que se han creído convenientes para los que no tengan hechos estudios de otros métodos de representación.

El Autor.

Sistema de acotaciones.

(1.ª parte)

Introducción.

1. **Consideraciones sobre los métodos geométricos de representación.**—La *Geometría descriptiva*, destinada á representar los cuerpos y á realizar en ellos las soluciones gráficas de los problemas, dispone, no sólo del sistema de dos ó tres planos de proyección perpendiculares entre sí, sino de otros varios que se indican al empezar su estudio; siendo los más usados en la práctica el método de los *planos acotados* y el de la *perspectiva* (*).

Si bien todos ellos son generales, y sirven para la representación de los cuerpos, al tratar de aplicarlos á casos prácticos y determinados detalles, unos lo consiguen con más sencillez y claridad que otros; y no hay razón para no elegir en cada caso aquel que sea más conveniente. Las superficies irregulares del terreno y las obras de fortificación, tienen, en general, una extensión considerable comparada con su altura, por lo cual, en el sistema de representación sobre un plano horizontal y otro vertical, se produce en este último una aglomeración tan grande de detalles, que resultan confusos; y de aquí la conveniencia, en este caso, de buscar otro medio que permita hacer esta representación con la claridad

(*) Todos ellos se hallan comprendidos en la rama de la *Geometría*, llamada *Geometría descriptiva*, y los tres sirven para la representación y *descripción* de los cuerpos.

necesaria para formar idea exacta de lo que se trata de representar.

2. **Sistema de acotaciones.**—El método llamado de *acotaciones* resuelve la cuestión. Sustituye la proyección vertical por una serie de números que indican el valor de la proyectante horizontal de cada punto, el cual queda determinado por su proyección horizontal y por este número, que recibe el nombre de *cota*, dando así nombre al método.

Antes de empezar á desarrollar éste, se hará la observación de que, pudiendo un cuerpo ser considerado como un conjunto de puntos, su representación dependerá de la de las superficies que le determinan; éstas, de la de sus líneas, y éstas, á su vez, de la de los puntos que la forman, y por tanto, sabiendo representar un punto, se podrán representar líneas, superficies y cuerpos.

3. **Necesidad de las escalas.**—Sustituyéndose las proyectantes verticales por números que expresen magnitudes dadas, y siendo preciso determinar el valor numérico de las proyecciones horizontales para poder comparar unas magnitudes con otras, es necesario sujetar los elementos de la figura á una relación determinada fácil de deducir en cada dibujo, puesto que no es posible que las magnitudes con que se represente el objeto sobre un plano sean las verdaderas, sino otras reducidas. De aquí la necesidad en toda representación por este método, de una *escala* que sirva para determinar el valor numérico ó gráfico de la longitud de un objeto representado en el plano, ó inversamente, para deducir de la verdadera, la que le corresponderá en éste.

Las *escalas*, cuyo estudio pertenece á la *Geometría* (*), ya se sabe pueden ser de dos clases, *numéricas* y *gráficas*, pudiendo usarse las dos, pero dándose en general la preferencia á las últimas.

Las escalas acompañarán siempre á todo problema ó repre-

(*) Véase *Geometría plana* de Ortega y Sala.

sentación por el sistema de planos acotados, y en el transcurso de estas lecciones, se supondrá siempre que todas las figuras están referidas á la escala $\frac{1}{1000}$, que puede ser numérica ó gráfica, según se crea más conveniente; recurriendo en este último caso á la figura 1.ª, siempre que sea necesario tomar magnitudes.

I

Sistema de representación.

Del punto.

4. **Representación de un punto.**—Sea A un punto del espacio (fig. 2.ª) y a a' las proyecciones de dicho punto sobre los planos X é Y.

Los puntos a y a' sirven para determinar el punto A del espacio, puesto que las perpendiculares $a\,A$ y $a'\,A$ á los planos de proyección X é Y, determinan un punto, que es el A.

Pero este punto A estará también determinado si se conoce la proyección a y la longitud de la proyectante horizontal $A\,a$ sobre el plano X, puesto que bastará levantar en a una perpendicular al plano horizontal y formar sobre ella una longitud igual á la que se da para la proyectante, y su extremo A será el punto pedido.

Se deduce de aquí la posibilidad de suprimir la proyección vertical y con ella el plano vertical de proyección, siempre que se sustituya dicha proyección por el valor numérico de la proyectante horizontal, relativa á cada punto, del cual, además, se dará su proyección horizontal.

5. **Definiciones.**—El número que expresa la longitud de la proyectante $A\,a$, tomada en la escala, se llama *cota* del punto A.

La proyectante $A\,a$ no es necesaria para la representación del punto; basta, en efecto, conocer el número que expresa su longitud, ó sea la *cota;* la cual se escribe al lado de a, como se ve en la

figura; consiguiéndose así tener la representación del punto sobre un solo plano, que se llama de *comparación*. Este plano se elige en general horizontal, por *conveniencia,* pero sin que sea condición precisa el tener esta posición en el espacio, pudiendo ocupar otra cualquiera.

6. **Posiciones de un punto.**—Un punto en el espacio no puede ocupar sino tres posiciones distintas con arreglo al plano de comparación; puesto que no puede estar sino encima, en el plano ó debajo de éste. Se ha convenido, para distinguirlas, en contar siempre el valor de la proyectante horizontal desde este plano, y según estén los puntos hacia la parte superior ó hacia la inferior, se afectan sus cotas con el signo + ó —, respectivamente, como indicando sentidos distintos. Así, a_{14} (fig. 3.ª) representa un punto A, catorce unidades por encima del plano de comparación, b_{-15}, el B, quince unidades inferior, c_0, el c, situado en el plano.

7. **Posiciones de dos ó más puntos.**—Los signos de las cotas de los puntos a_{14} y b_{-15}, indican desde luego que éstos están á distinto lado del plano.

Los b_{-15}, y d_{15} pertenecerán á dos puntos á distinto lado y equidistantes del plano.

Los que se hallan en una misma perpendicular al plano de comparación, tienen la misma proyección y sólo varían en las cotas que se escriben al lado de aquélla; así, e_{+10} y f_{-9}, representan dos puntos en la misma vertical, uno de cota (10), por encima del plano, y otro de cota (—9), por debajo.

Del mismo modo, el punto g_{20} representa un punto veinte unidades por encima del plano y otro h_0, de cota cero, en el mismo plano.

NOTA. Comparado este método de representación con el de las proyecciones sobre dos planos, se ve es mucho más sencillo, puesto que, en este último, á más de las dos proyecciones, es necesario que uno de los planos se abata sobre el otro para poder operar en un solo plano; mientras que en este sistema no hay necesidad de abatimiento alguno; quedando, además, suprimida una de las dos proyecciones.

8. **Diferencia de altura de puntos.**—Las cotas sirven para determinar con suma facilidad la diferencia de distancias de los puntos al plano de comparación. Si éste es horizontal, estas distancias se llaman *alturas;* y su diferencia, *diferencia de alturas;* las cuales se obtendrán del modo siguiente:

1.° Si los puntos tienen ambos sus cotas positivas, bastará restar la menor de la mayor. Los puntos d_{15} y e_{10} tienen una diferencia de alturas 15—10=5. Si uno de los puntos, tal como el c_0, está en el plano y el otro es el a_{14}, la diferencia será 14—0=14, cota del *a*.

2.° Si los dos puntos tienen cota negativa, como los b_{-15} y f_{-9}, se restará de la cota mayor, que es (—9), la otra menor (—15) y la diferencia (—9)—(—15)=6, será la buscada. El punto b_{-15}, como más distante del plano, se llama el más bajo. Si los puntos fuesen de cotas de signo contrario, como a_{14} y f_{-9}, su diferencia se hallará, restando también la menor de la mayor; así (14)—(—9)=(23), será la diferencia.

Los e_{10} y b_{-15} darán 10—(—15)=25.

De todo lo expuesto se deduce una sencilla regla general y de fácil aplicación, que es la siguiente:

9. **Regla.**—*Para obtener la diferencia de alturas entre dos puntos, ó sea la de sus distancias al plano de comparación, basta restar algebraicamente la cota menor de la mayor, y la resta será la diferencia buscada.*

De la recta.

10. **Representación de la recta.**—Dos puntos *A* y *B* (figura 4.ª) determinan una recta en el espacio. Las proyecciones *a* y *b* de estos puntos sobre el plano de comparación y sus cotas (15 y 30), bastarán para determinarla en el sistema de acotaciones; y su representación quedará hecha por la proyección horizontal *a b* y las cotas de *a* y *b*.

11. **Posiciones de la recta.**—Las posiciones que una recta puede ocupar respecto al plano de comparación, son las siguientes (*):

1.ª Oblicuas al plano de comparación.

La *A B* (a_{15} b_{30}), superior al plano y sin cortarle en este trozo; la *E B* (e_0 b_{30}), que le corta en el punto e_0; la *C D* (c_{-20} d_{-10}), inferior al plano sin cortarle; la *E C* (e_0 c_{-20}), que le corta en e_0, y la *B C* (b_{30} c_{-20}), que tiene parte por encima y parte por debajo del plano, al cual corta en el punto e_0.

En rigor, según se ve en la figura, no hay sino una sola posición oblicua de la recta, si se la supone ilimitada, puesto que todas las consideradas no son más que trozos limitados de una misma *B C*; pudiendo deducirse de uno cualquiera todos los demás, tan sólo con prolongarle en uno ú otro sentido. Las cotas de los dos puntos que determinan la recta, permiten ver la posición del trozo que comprenden respecto al plano de comparación, puesto que si las dos son positivas, el trozo de recta está por encima; si son negativas, por debajo; si una es positiva y la otra negativa, parte estará por encima y parte por debajo, cortando al plano en el punto de separación de estas partes, que tendrá por cota cero.

2.ª Perpendiculares al plano.

Todos sus puntos se proyectarán en uno solo, cuya cota será indeterminada. Se las representa por una letra *p*, ó por las cotas de dos cualesquiera de sus puntos (p_{12} q_{16}), pudiendo admitir todas las cotas desde $-\infty$ á $+\infty$.

3.ª Paralelas al plano.

Siendo las cotas de sus puntos todas iguales, su proyección *k l* y la cota de uno de ellos, bastará para representarlas, aunque generalmente se ponen dos cotas, una en cada extremo, como (k_{13} l_{13}).

(*) Mucho menor número que las que se consideran en la parte de la *Geometría descriptiva,* que estudia el método de las proyecciones sobre dos planos.

Un caso particular es la $m_0 n_0$, cuya cota (0) indica se halla la recta en el plano de comparación.

12. **Relaciones entre una recta, su proyección y las cotas.**—Una recta acotada, en cualquiera de las varias posiciones en que se la represente, se halla completamente definida; y para demostrarlo, se recordarán antes algunas propiedades geométricas.

Una recta $A B$ (fig. 5.ª), su proyección $a b$ y las dos proyectantes $A a$ y $B b$ de sus extremos, forman un trapecio recto, en el que se verifica, que toda recta $C c$ paralela á sus bases, divide á los otros dos lados en partes proporcionales; luego

$$\frac{BC}{CA} = \frac{bc}{ca};$$

pero si por A se tira la $A b_1$ paralela á la proyección $a b$, se tiene también

$$\frac{BC}{CA} = \frac{Bd}{Cc_1}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{BC}{CA} = \frac{bc}{ca} = \frac{Bd}{Cc_1}.$$

Si en esta proporción, para abreviar y generalizar, se llaman L y L' á BC y CA, longitudes de dos porciones de la recta $A B$; p y p' á las $b c$ y $c a$, proyecciones de las L y L'; y d y d' á las $B d$ y $C c_1$, diferencias de cotas de los extremos de estas porciones L y L'; se tendrá:

$$\frac{L}{L'} = \frac{p}{p'} = \frac{d}{d'},$$

proporción que, traducida, dice: *que las porciones* L *y* L′ *de una misma recta, son proporcionales á sus proyecciones* p *y* p′, *así como á las diferencias de altura de sus extremos; deduciéndose, como consecuencia, lo siguiente:*

Si una recta cualquiera A B *se divide en partes proporcionales á varias rectas, las proyecciones, sobre el plano, de los puntos de división, dividirán del mismo modo á la proyección* a b *de la recta; y la*

diferencia de altura de los puntos extremos, también quedará dividida del mismo modo por las diferencias de alturas de los puntos de división.

Si la recta se dividiese en partes iguales, la proyección también quedaría dividida del mismo modo, así como la diferencia de alturas.

Las recíprocas de estas proposiciones también son ciertas.

13. **Determinación de la recta.**—Recordados estos preliminares se pasará á la determinación de la recta.

La proyección *a b* de una recta y las cotas de dos de sus puntos *a* y *b*, determinan la recta. Quedará esto probado si se demuestra que se puede calcular la cota de cualquiera de sus puntos, cuando se conozca su proyección; y recíprocamente, que dada la cota de un punto cualquiera de la recta, se puede hallar la proyección de este punto.

Sea, en efecto (fig. 6.ª) ($a_5\ b_{13}$), la proyección de una recta acotada; la cota de uno de sus puntos *c*, se obtendrá por la fórmula anterior

$$\frac{a\,b}{a\,c} = \frac{d}{x}\ (\alpha),\ \text{de la cual se deduce,}\ x = d \times \frac{a\,c}{a\,b}.$$

Bastará, pues, medir sobre la escala del plano, el valor de $a\,b = 26$ y $a\,c = 8$, y puesto que $d = 13 - 5 = (8)$, resultará para $x = (2{,}46)$, que será la diferencia de cotas entre *C* y *A*, y añadiendo este valor á la cota de *A*, se tendrá la de *C*, ó sea $5 + 2{,}46 = 7{,}46$.

Recíproca.—Sea la recta acotada *a b*, en la que se quiere determinar la proyección del punto cuya cota es (10). La misma relación (α) dará

$$\frac{a\,b}{y = a\,d} = \frac{d}{x = (10 - 5)} = \frac{8}{5},$$

luego

$$y = a\,d = \frac{5}{8} \times ab = (16{,}25),$$

cuya longitud se tomará á partir de *a* hasta donde llegue, marcando así el punto buscado *d*.

14. **Casos particulares.**—Si la recta fuese perpendicular al plano de comparación, tal como la (c_{10} d_6) (fig. 7.ª), también se verificará la regla, observando que la fórmula (α) se reduce en este caso á

$$\frac{0}{0}=\frac{d}{x}, \quad \text{ó sea} \quad x=\frac{0}{0},$$

valor indeterminado. En la recíproca, dicha fórmula se reduce á

$$\frac{0}{y}=\frac{d}{x} \quad \text{ó} \quad y=\frac{0}{d}=0;$$

como debe de ser, puesto que la proyección de un trozo cualquiera de la recta es un punto.

Si la recta es paralela al plano, se verifica que las magnitudes de las rectas son iguales á sus proyecciones y todos los puntos tienen la misma cota.

15. **Escala de pendiente de una recta y su determinación.**—La propiedad anterior da lugar á una aplicación, que es, determinar la escala de pendiente de una recta; entendiéndose por tal, la proyección *a b* de la recta *A B*, dividida en partes iguales por puntos cuyas cotas sean enteras. Este problema queda reducido á sustituir en la fórmula (α), en vez de *d*, una unidad, con lo cual será

$$\frac{a\,b}{x}=\frac{d}{1} \quad \text{ó} \quad x=\frac{a\,b}{d},$$

lo que indica, que para hallar la escala de pendiente de una recta *A B*, dada por las cotas enteras de dos de sus puntos *a* y *b*, basta dividir la proyección *a b* en tantas partes iguales como unidades haya en la diferencia de cotas de sus extremos, y estos puntos de división tendrán por cotas los números enteros intermedios entre los de *a* y *b*, diferenciándose en una unidad del que le precede ó sigue. Sea (a_3 b_8) (fig. 8.ª) la recta; si se la divide en 8—3=5 partes iguales, estos puntos tendrán por cotas los números interme-

dios 4, 5, 6 y 7; y el valor numérico de una de estas partes será

$$x = \frac{a\,b}{d} = \frac{a\,b}{5}.$$

Si la recta fuese dada por dos cotas fraccionarias (fig. 7.ª), como la ($c_{3,4}$ $d_{8,2}$), bastaría tomar como unidad la del orden más inferior que hubiese en las cotas, y que aquí es la décima, reducir las dos cotas á esta unidad, tomar la diferencia 82 — 34 = (48); y dividir en 48 partes la proyección, que quedaría así acotada de décima en décima.

16. **Métodos geométricos.**—El procedimiento para dividir una recta *a b* en partes iguales tiene aplicación en este caso, pues el número de partes iguales ha de ser el que exprese la diferencia de cotas; así, si éstas son enteras, como en la (a_3 b_8) 8—3=5, será el número de partes iguales.

Si las cotas de la recta no son enteras, se modificará el procedimiento del modo siguiente: Sea la ($a_{4,3}$ $b_{10,4}$) (fig. 9.ª), la diferencia 10,4 — 4,3 = 6,1 indica que se puede dividir la recta en 61 partes iguales, con lo cual quedará acotada de décima en décima; pero si no se necesitan más que los puntos de cota entera 5.6.7. etcétera, este procedimiento es largo, puesto que hay que dividir la recta en muchas y pequeñas partes.

Puede emplearse otro procedimiento que es más conveniente: En un extremo $a_{4,3}$ de la recta, se traza otra cualquiera *a c*, y en vez de tomar sobre ella una magnitud arbitraria, como en el caso general, se toma aparte y se divide en diez partes iguales. Desde dicho punto $a_{4,3}$ se tomarán tantas de estas partes como décimas le faltan á la cota (4,3) para valer 5, ó sean (0,7), se llevará *a cinco* veces, y por último (0,4) décimas partes de *a*, se unirá este punto con el $b_{10,4}$ y por los demás, tirando paralelas, éstas determinarán los 5.6.7..... de la recta dada; y por tanto, la escala de pendiente buscada.

17. **Métodos prácticos.**—1.° Si la recta es la a_5 b_{12} (fig. 10), se toma papel transparente y se trazan en él un sistema de rectas paralelas, cuyo número sea igual á la diferencia de cotas entre *a*

y *b*, aumentada en una unidad; y de modo que la distancia que separe las extremas sea menor que la distancia *a b*. Se coloca el papel transparente sobre la *a b*, haciéndole mover hasta que se consiga que la primera paralela pase por *a* y la octava por *b*, bastando entonces marcar sobre *a b* los puntos de intersección de las demás paralelas. Este procedimiento se suele emplear cuando no se quieren trazar líneas en los problemas.

18. 2.º Se toma una regla ó escuadra *m n*, que en uno de sus bordes contenga una escala de milímetros, por ejemplo. Si la recta *a b* (fig. 11_a), tiene de cotas (1) y (4), habrá que determinar las dos cotas intermedias. Se coloca la regla de modo que una división cualquiera, por ejemplo, un número exacto (10) de centímetros, se apoye en *a*, y la escuadra *E*, como se ve en la figura, en la división (4), que será la que resulté de añadir á la 1 el número (3), diferencia de cotas; y moviendo ambas alrededor de *a* hasta que se consiga que el borde de la escuadra pase por el punto *b*, no habrá más que sujetar la regla y hacer correr la escuadra, para trazar las paralelas que pasan por los puntos marcados en la regla con las divisiones 40, 30, 20 centímetros; y sus intersecciones con la *a b* darán las cotas (3.2), que son las que se buscan.

19. Si en vez de ser la recta anterior con cotas enteras, fuese la de la figura (11_b), con cotas (6.3) y (15.7), el procedimiento sería el mismo con sólo la variación de que, en vez de hacer la coincidencia del punto (6.3) con una división exacta del doble decímetro, se haría con una división más tres décimas partes; y del mismo modo, la escuadra se colocará coincidiendo su borde con la división correspondiente, más siete décimas. El resto de la operación se hace como en el caso anterior.

20. **Propiedades de las rectas acotadas.**—Entre una recta $A B = L$ (fig. 12), su proyección $a b = p$ y la diferencia de cotas $B c = d$ de sus extremos, existe la relación siguiente:

$$(A B)^2 = (a b)^2 + (B c)^2 \text{ ó } L^2 = p^2 + d^2.$$

Esta fórmula permite hallar una de estas cantidades, conocidas las otras dos, y da lugar á una discusión fácil de seguir en las figuras 12, 13 y 14.

1.° Sea L = constante; p y d tienen que variar en razón inversa; es decir, que si p disminuye, d aumenta; luego *si una recta* A B (figura 12) *gira en su plano proyectante alrededor de uno de sus extremos, conservando su longitud* A B, *su proyección,* a b, a b′, a b″, *etc., va disminuyendo á medida que aumenta la diferencia de cotas de sus extremos, ó lo que es lo mismo, á medida que aumenta el ángulo* B A c.

Si $B A B_1 = 0$, es decir, si $A B_1$ es paralela al plano de comparación, $A B_1 = a b_1$; si $B_1 A B = 90°$, $p = 0$. La fórmula da la longitud de la recta en función de la proyección y diferencia de cotas.

2.° Si p = constante; como $p^2 = L^2 - d^2$, L crece con d (figura 13); luego, *en caso de igualdad de proyección, á mayor diferencia de cotas ó á mayor inclinación, corresponde mayor longitud de recta.*

3.° Si d = constante; como $d^2 = L^2 - p^2$ (fig. 14), L crece con p. Luego *las rectas que tienen sus extremos con igual diferencia de cotas, cuanto mayores son, mayor será su proyección; ó lo que es lo mismo, cuanto menor sea la inclinación de una recta, mayor será su proyección; y á igualdad de diferencia de cotas, la que tenga mayor proyección, será menos inclinada y recíprocamente, más larga.*

1.er CASO (fig. 15). Si en las $a_4\, b_8$ y $c_6\, d_9$, se hallan los valores de L y L', se verá que $L = \sqrt{(a b')^2 + 4^2}$ y $L' = \sqrt{(c\, d)^2 + 3^2}$ y $L = L'$; y como $a b < c d$, la primera tendrá mayor inclinación.

2.° CASO. Las $e_4\, f_{10}$ y $g_4\, h_8$, en que $e f = g h$, representan dos rectas, de las cuales, la $g h$ es más corta que la otra, puesto que $d > d'$.

3.er CASO. Las $k_3\, l_8$, $m_6\, n_{11}$ y $r_4\, s_9$, en que $d = 5$, $d' = 5$, $d'' = 5$, son tres rectas, de las cuales la más inclinada es la últi-

ma; después la segunda y últimamente la primera, puesto que $kl = p > (mn = p') > (rs = p'')$.

21. **Pendiente de una recta.**—*Pendiente* de una recta es su inclinación con respecto al plano de comparación; así, la recta es tanto más pendiente, cuanto mayor es el ángulo que forma con el horizontal. La pendiente se mide por este ángulo expresado en grados y también (recordando la *Trigonometría*), por su tangente, ó sea por la relación entre la diferencia de cotas de sus extremos y su proyección; expresión que puede reducirse á 1, diferencia de las cotas de dos puntos consecutivos, dividida por la proyección correspondiente á estos puntos, ó sea

$$\text{pendiente} = \frac{1}{m} = \text{tag}\ \alpha.$$

Para pendiente de una recta, se toma el ángulo menor de 90°, el cual crece con su tangente.

Del plano.

22. **Determinación y representación del plano.**—El plano queda determinado del mismo modo que en *Geometría;* así, dos rectas que se cortan ó son paralelas, un punto y una recta, ó tres puntos, bastan para su determinación.

Entre todas las rectas que se pueden elegir para determinar un plano, las que mejor le representan son: su *traza horizontal* y su *línea de máxima pendiente* (*); puesto que bastan para poder trazar todas las horizontales del plano, y por tanto todos los puntos de éste, como se ve en la figura 16.

Basta, en efecto, tirar por cada punto acotado de la línea MN

(*) La *traza* es la intersección del plano dado con el de comparación. La *línea* de máxima pendiente, se sabe por la Geometría, que es la línea recta que en el plano es perpendicular á la *traza*.

La línea de máxima pendiente se expresa en abreviatura *por línea de m. p.*

de m. p., una paralela á la traza *H H*, para tener la horizontal del plano correspondiente á aquella cota. Pero si se recuerda que la proyección de la línea de m. p. y la traza son perpendiculares, bastará con el conocimiento de la primera para poder determinar el plano y representarle, cuando sea necesario, por sus horizontales; asi, pues, la recta (m_{20} n_0), representa un plano, del cual, es su línea de m. p.

Siendo preciso distinguir cuando una recta representa sólo esta recta ó es la línea de m. p. de un plano, se acostumbra en este último caso á acompañarla con otra línea gruesa paralela, como indica la figura 17, en m_3 n_8.

En la representación de un plano, puede tomarse la línea de m. p. que pase por uno cualquiera de sus puntos, así que lo mismo puede estarlo por la *m n*, como por la *m' n'*, ó por la *m'' n''*. Esto equivale á trasladarla á cualquier parte del dibujo, con tal que conserve el paralelismo y la magnitud comprendida entre sus cotas.

23. **Comprobación.**—Se ha dicho que un plano queda determinado y representado por su línea de m. p.; y, en efecto, dada la proyección de un punto de un plano, puede determinarse su cota; é inversamente, dada la cota de un punto de un plano, puede determinarse su proyección.

Sea m_8 n_4 (fig. 18) el plano dado por su línea de m. p. y *a* el punto cuya cota se busca; tirando por *a* la perpendicular á la m_8 n_4, ésta será una horizontal del plano, cuya cota se obtendrá hallando la escala de pendiente de m_8 n_4; lo que dará (5,8) para su cota, que será la de *a*.

Si se quisiera hallar la proyección del punto del plano cuya cota es (5,8), bastaría buscar esta cota en la línea de m. p. y por ella tirar la perpendicular, la cual será la horizontal del plano de cota (5,8); siendo todos sus puntos soluciones del problema.

24. **Posiciones de un plano.**—Un plano puede ocupar las posiciones siguientes respecto al de comparación:

1.ª *Oblicuo.*—Se reconoce porque su escala de pendiente es una recta oblicua.

2.º *Paralelo.*—Su línea de m. p. será horizontal y todas las rectas trazadas en el plano podrán serlo; así que este caso no puede representarse por el método general y se acostumbra á indicarle por una horizontal cualquiera (fig. 19) $m_8\ n_8$.

3.º *Plano vertical.*—La línea de m. p. es vertical y su proyección está reducida á un punto, como en 8.4. En ese caso, las horizontales no quedan determinadas, pues no se conoce su dirección y sólo se sabe han de pasar por (8.4); es necesario añadir la dirección de una de ellas, la cual será la proyección de todas las demás, y la representación es la de la figura 19, en $m_8\ n_4$.

25. **Pendientes de un plano.**—Estando un plano representado por su línea de m. p. y medido el ángulo que forma con el de comparación por el de su línea de m. p. con su proyección, se podrá conocer su pendiente por la de esta línea y aplicar á los planos todo cuanto se ha dicho respecto á las rectas (párrafos 20 y 21); así que, *á igual diferencia de cotas é igual proyección, corresponden inclinaciones ó pendientes iguales, y á mayor ó menor diferencia de cotas é igualdad de proyección, corresponde mayor ó menor pendiente.*

II

Rectas y planos.

Posiciones de rectas y planos.

26. **Posiciones de rectas.**—Dos rectas en el espacio se cortan, son paralelas ó se cruzan; y en cada uno de estos casos, su representación deberá acusar sus posiciones.

1.º Sean las dos rectas $a_4\ b_{12,3}$ y $c_6\ d_{10,5}$ (fig. 20). Si estas rectas tienen un punto común, será el proyectado en el punto *e*, cuya cota ha de ser la misma en las dos rectas; luego para que dos rectas se corten, es preciso que lo hagan sus proyecciones y que determinadas sus escalas de pendiente, tengan la misma cota en este punto; ó también que, uniendo por rectas los puntos de igual cota en las dos rectas dadas, resulten aquéllas paralelas, puesto que deben ser las horizontales del plano que determinan.

27. Si dos rectas son paralelas, sus proyecciones también lo serán y se verificará, además, que las proyecciones serán proporcionales á las diferencias de cotas, y que éstas, irán en el mismo sentido.

Las rectas $a_{6,4}\ b_{15,3}$ y $c_{8,6}\ d_{17,5}$ son paralelas, puesto que

$$(15{,}3 - 6{,}4) = 8{,}9,\ (17{,}5 - 8{,}6) = 8{,}9 \text{ y } a\,b = c\,d;$$

y las cotas aumentan en el mismo sentido. Si son paralelas, sus inclinaciones serán iguales; luego á igualdad de proyección, debe corresponder igual diferencia de cotas; además, sus graduaciones deberán crecer ó decrecer en el mismo sentido, pues de lo contrario, tendrán inclinaciones iguales, pero en sentido inverso.

28. Si las rectas se cruzan, no tendrán igual cota en el punto de cruce de sus proyecciones; así las (*a b*) y (*c d*) (fig. 21) tienen en *e′*

la cota (6,6), para la (*a b*), y en *e* la cota (3,4), para la (*c d*); luego ésta pasa por debajo de la otra y no la corta.

29. **Rectas en un mismo plano vertical.**—Dos rectas pueden estar en un plano vertical; en este caso las proyecciones son las mismas y sólo varían en las cotas; así (fig. 22) ($a_5 . b_8$) y $c_{3,2}$ $d_{6,4}$ representan dos rectas situadas en un mismo plano vertical; $e_5 f_8$ y g_{14} h_6 representan una oblicua y una vertical.

30. Para distinguir varias rectas de un mismo plano vertical, se ponen las cotas del modo que se ve en la figura, es decir, de un mismo lado las dos de cada recta, como las (3,2 y 6,4) de la *c d*; pero si hubiera más de dos, se establece, que las cotas de una misma recta deberán ir con acentos ó índices iguales; así las cotas (4.3) (7′.15′) (8″.2″), representan otras tantas rectas. Aun en el caso de existir dos rectas solamente, conviene acentuar las cotas de una de ellas.

31. Las rectas que se hallan en el mismo plano vertical, pueden ser paralelas ó cortarse oblicua ó perpendicularmente. Para reconocer su posición, se observará, que si fuesen paralelas, á diferencias iguales de cotas corresponderían magnitudes iguales de proyección y cotas en el mismo sentido; así, las rectas k_4 l_{12} y m_8 n_{16} son paralelas. Si no se verificaran todas estas condiciones, las rectas se cortarán.

Si las rectas se cortan perpendicularmente, como las *A B* y c_0 *D* (fig. 23), se verá que, desde su punto de intersección *I*, las cotas deben ir creciendo en sentido inverso sobre la proyección común *a b*; que la pendiente de las dos rectas será inversa, puesto que sus ángulos de pendiente α y β son complementarios y se verificará que

$$\text{tag}\,\alpha = \text{cotg}\,\beta = \frac{1}{\text{tag}\,\beta}.$$

Para reconocer esta perpendicularidad, será preciso hallar la pendiente de las rectas y ver si es inversa.

La figura 23 representa dos perpendiculares, puesto que las rectas $a_4\,b_{10}$ y $c_0\,d_{30}$ que se cortan en i_9 tienen por pendientes

$$\text{tag}\ \alpha = \frac{9-4=5}{a\,c=21\ (*)}\ ; \quad \text{tag}\ \beta = \frac{30-9=21}{d\,i=5\ (*)}\ .$$

32. **Posición de dos planos.**—Las escalas de pendiente de dos planos pueden cortarse ó ser paralelas.

Si las escalas de pendientes de dos planos se cortan, las horizontales de la misma cota se cortarán y sus intersecciones serán puntos comunes á los dos planos, y por consiguiente á la recta común intersección. Sean (fig. 24) $m_8\,n_{13}$ y $p_8\,q_{13}$ los dos planos. No siendo paralelas las escalas, se cortarán los planos, y trazando dos horizontales, las 13 y 8, por ejemplo, se cortarán en $r_{13}\,s_8$; lo que demuestra que los planos se cortan.

33. Si las proyecciones de las escalas son paralelas, pueden ocurrir dos casos: 1.° Que los planos tengan desigual ó igual pendiente; cortándose, en el primer caso, y siendo paralelos, en el segundo. Si tienen desigual pendiente, como sus horizontales son paralelas, su intersección será una horizontal de los dos, puesto que se les puede considerar como planos pasando por rectas paralelas. Se reconocerá este caso, cuando en las líneas de m. p. no corresponda igual longitud á igual diferencia de cotas, como en los $m_4\,n_{10}$, $p_4\,q_{10}$ (fig. 25); ó cuando, siendo iguales, vayan en sentido opuesto, como $m_7\,n_{15}$, $p_7\,q_{15}$ (fig. 26).

En el primer caso, tienen común la horizontal (4), en el segundo, la (11).

Si los planos son paralelos, sus horizontales y sus escalas de pendiente también lo serán; y teniendo los planos igual pendiente y en el mismo sentido, sus escalas serán iguales en magnitud para diferencias iguales de cota, y además irán en el mismo sentido.

34. Si dos planos son perpendiculares, no existe relación

(*) *a c* y *d i*, medidos en la escala (fig. 1.ª), dan los valores 21 y 5 para las longitudes respectivas.

alguna entre sus horizontales, ni por tanto, entre sus escalas de pendiente. Sólo en el caso de ser vertical uno de los planos, sus horizontales serán perpendiculares á las del otro. El $p_5\, q_4$ (fig. 27), es perpendicular al $m_4\, n_7$.

35. **Intersección de planos.**—La intersección de un plano cualquiera, con otro paralelo al de comparación, es una horizontal del plano y muy fácil de determinar.

Sea (fig. 28) $m_4\, n_9$ el plano y (6) la cota del plano horizontal.

La (6,6) será la intersección.

La intersección de dos planos puede siempre reducirse al caso anterior.

Sean los planos $m_8\, n_{13}$ y $p_8\, q_{13}$ (fig. 24).

Un plano horizontal de cota (13), corta á los dos según las horizontales (13); luego r_{13}, es un punto de la intersección común.

Trazando el horizontal de cota (8), será s_8 otro punto de la intersección, el cual, unido al r_{13}, dará la recta pedida $r_{13}\, s_8$.

36. *Otro ejemplo.*—(Fig. 29) $m_7\, n_{11}$ y $p_7\, q_{11}$ son los planos dados; $r_7\, s_{11}$ será la intersección.

37. Si las horizontales fuesen á cortarse muy lejos, ó fuera de los límites del dibujo, no sería conveniente el uso de planos horizontales auxiliares, eligiéndose otros cuyas intersecciones con los propuestos fuesen fáciles de hallar.

Sean los planos $m_4\, n_{10}$ y $p_4\, q_{10}$ (fig. 30, lám. 2.ª). El plano auxiliar $t_{10}\, u_4$ dará el punto r, el $t'_{10}\, u'_4$ dará el s; luego $r\, s$ es la intersección.

38. *Otro.*—(Fig. 31). Sean los planos $m_{12}\, n_8$ y $p_{12}\, q_8$; el $t\, u$ es el auxiliar que dará el punto r, por el cual pasa la común intersección $r_{14}\, s_{14}$, horizontal común de los dos planos.

39. *Otro.*—(Fig. 32). Sean el plano $m_5\, n_{11}$ y el vertical $p_4\, q_8$; $r_{11}\, s_5$ será la intersección.

40. *Otro.*—(Fig. 33). El plano $m_4\, n_4$ es horizontal y el $p_3\, q_8$ vertical, $r_4\, s_4$ será la intersección.

41. *Otro.*—(Fig. 34). Los planos están dados, el uno por las dos rectas

a_9 b_4 y a_9 c_4 y el otro por las d_{12} e_4 y d_{12} f_4; planos auxiliares, los m_4 n_9 y m'_4 n'_9; intersección la *r s*.

42. *Otro.*—(Fig. 35). Un plano dado por dos rectas a_5 b_9 y a_5 c_9 y otro por su línea de m. p. m_9 n_5.

Planos auxiliares, los horizontales 5 y 9; intersección la r_9 s_5.

43. *Otro.*—(Fig. 36). Un plano dado por dos rectas paralelas a_4 b_{10} y c_4 d_{10} y otro por dos rectas que se cortan e_4 f_{10} y e_4 g_{10}; planos auxiliares inclinados, m_4 n_{10} y m'_4 n'_{10}, que dan los puntos *r* y *s* de la intersección.

44. **Intersección de rectas con planos.**—La intersección de una recta con un plano, según se sabe, no es sino un caso particular de la intersección de planos, puesto que basta hacer pasar uno por la recta, hallar su intersección con el dado y el punto de intersección de ésta recta con la dada en el punto buscado.

Sean (fig. 37) a_7 b_5 la recta y m_5 n_7 el plano; por *a b* se traza el plano auxiliar p_5 q_7; su intersección con el *m n* es la r_7 s_5 y la de ésta con la *a b* es el punto *x* buscado, y cuya cuota, determinada, es (6,1).

Si la recta es horizontal (fig. 38), como la a_4 b_4, basta trazar la horizontal del plano de la misma cota, y el punto de encuentro x_4 es el pedido.

Si es vertical la recta (fig. 39), como la a_5 b_{12}, tirando por *a* la horizontal del plano, y determinando su cota (5, 6), ésta será la del punto *x*, que se busca.

45. **Intersección de dos rectas.**—Dos rectas cuyas proyecciones se cortan, pueden cortarse ó cruzarse. Se ha visto el medio de averiguarlo (párrafo 26), hallando las escalas de pendiente de las rectas y viendo si en el punto de encuentro de las proyecciones tienen la misma cota; pero el procedimiento anterior puede resolver este problema con más facilidad, pues bastará hacer pasar un plano por cada una de ellas y hallar la recta intersección, la cual deberá pasar por el punto donde se cortan las proyecciones de las dadas, si éstas se cortan en el espacio.

Sean (fig. 40) a_4 b_8 y c_{12} d_6 las rectas. Los planos auxiliares t_8 u_6

y t'_8 u'_6 se cortan según la recta r_6 s_8, que por no pasar por e, indica que las rectas se cruzan.

46. La intersección de dos rectas a_4 b_8 y c'_7 d'_4 (fig. 41), que se hallan en un mismo plano vertical, puede obtenerse cómo aplicación del problema anterior.

En efecto, por la a b trácese un plano cualquiera t_4 u_7 y otro t'_4 u'_7 por la c' d', pero del modo más conveniente para hallar su intersección r_4 s_7, y el punto $x_{5,8}$ será el pedido.

47. **Posiciones de rectas y planos.**—Una recta puede cortar ó no á un plano: en el primer caso puede ser oblicua ó perpendicular, en el segundo, será paralela.

Si la recta es oblicua al plano, su proyección puede ocupar una posición cualquiera respecto á la línea de m. p. de éste (fig. 37); a_7 b_5 y m_5 n_7 representan una recta y un plano oblicuo.

Si la recta es perpendicular al plano, su proyección será perpendicular á la traza, y, por consiguiente, paralela á la proyección de su línea de m. p., ó se confundirá con ella. La recíproca no es cierta; no basta que una recta tenga su proyección paralela á la línea de m. p. de un plano para que le sea perpendicular, puesto que todas las que se hallen en el plano vertical perpendicular á su traza horizontal, satisfacen á esta condición, y entre ellas una sola será perpendicular al plano dado.

Si la recta a_{15} b_{10} (fig. 42) es paralela al plano n_4 m_9, será paralela á una recta situada en él; pero entre su proyección y la de su traza puede no existir relación alguna, á no ser que la recta sea horizontal, en cuyo caso, siendo paralela al plano, lo tendrá que ser á sus horizontales, y, por consiguiente, perpendicular á la línea de m. p. En el caso anterior, para averiguar si la recta y el plano son paralelos, basta, por un punto cualquiera, por ejemplo el c_9 del plano m n, trazar una paralela c_9 d_4 en el plano y ver si la magnitud c_9 d_4, cuya diferencia de cotas es 5, es igual á la a_{15} b_{10} de la recta a b, y si se verifica, las rectas son paralelas, y por lo tanto, la a b lo será al plano.

La recta (4,4) (fig. 43) es horizontal y paralela al plano, por ser perpendicular á su línea de m. p.

Problemas (*).

48. 1.° *Hallar la traza de una recta sobre el plano de comparación.*

Bastará hallar la escala de pendiente, y en ella el punto de cota cero.

Si la recta es perpendicular al plano de comparación, la misma proyección de los puntos es la de su traza (0). Si es horizontal, no hay traza, puesto que la recta es paralela al plano.

49. 2.° *Dada la escala de un plano* $m_7\, n_{15}$ (fig. 44) *y la proyección* a, b, c, d, e, *de los vértices de un polígono situado en él, determinar las cotas de estos vértices y las de sus lados.*

Se reduce á repetir para cada vértice el problema de, dada la proyección de un punto en un plano, hallar su cota; para lo cual, se halla lo primero la escala de pendiente del plano.

50. 3.° *Por un punto* a_{15} (fig. 42), *tirar una paralela á un plano* $m_9\, n_4$.

Bastará trazar una recta cualquiera $d_4\, c_9$, en el plano, y tirar por *a* una paralela á ésta, como la *a b*.

Entre las rectas que se pueden trazar en el plano están las horizontales y la de m. p., y ambas pueden servir, como más fáciles de trazar.

51. 4.° *Por un punto* c_9 (fig. 45), *trazar un plano paralelo á una recta* $a_6\, b_{12}$.

Basta trazar por el punto una paralela á la recta y por ella hacer pasar un plano cualquiera; como se ve en la figura, en los $m_9\, n_5$, $m'_9\, n'_5$, $m''_9\, n''_5$ ..... etc.

52. 5.° *Dadas dos rectas* $a_3\, b_8$ *y* $c_7\, d_{12}$ (fig. 46), *hacer pasar por cada una de ellas un plano paralelo á la otra.*

(*) Estos ejercicios deben resolverse en la clase, bien en la pizarra, bien delineados en pliegos y con datos variados.

Por b_8 una paralela á $c\,d$, y por ésta y la $a\,b$ un plano $m_8\,n_3$.

Por c, una paralela á $a\,b$, y por ésta y la $c\,d$, un plano $p_7\,q_{12}$, el cual, con el $m_8\,n_3$, resuelven el problema.

53. 6.° *Por un punto* a_7, *trazar un plano paralelo á otro* $m_2\,n_{10}$ (fig. 47).

Por a_7 una perpendicular á $m_2\,n_{10}$, y ésta será la horizontal de cota 7 del nuevo plano, cuya escala de pendiente $p_7\,q_{15}$ deberá ser paralela á $m\,n$, y sus cotas serán p_7 y q_{15}, obtenidas uniendo p_7 con m_2 y trazando la paralela $n_{10}\,q_{15}$.

54. 7.° *Por un punto* a_7 (fig. 48), *trazar una recta perpendicular á un plano* $m_3\,n_8$.

La proyección de la recta será perpendicular á la traza del plano, y, por lo tanto, á las horizontales de éste; luego será paralela á la de su línea de m. p. La pendiente del plano y la de la recta serán inversas, puesto que forman con el horizontal ángulos complementarios; y si por el punto a se traza la línea de m. p. del plano $m\,n$, quedará el problema reducido á trazar una recta perpendicular á ésta. La pendiente de $m\,n$ es

$$\frac{5}{m\,n = 20\,(*)} = \frac{1}{4},$$

luego la de la recta buscada será

$$\frac{20}{5} = \frac{4}{1};$$

y tomando $a\,b = 5$ y dando á b una cota igual á la de a más 20 unidades, $a_7\,b_{27}$ resolverá el problema.

55. 8.° *Por un punto, trazar un plano perpendicular á una recta* (fig. 49).

Sea a_8 el punto y $b_3\,c_{18}$ la recta. La escala de pendiente del plano será paralela á $b\,c$ y una horizontal será la a_8; la pendiente de $b\,c$ es igual á

$$\frac{18 - 3 = 15}{b\,c = 25\,(*)} = \frac{3}{5};$$

(*) Medido en la escala.

la del plano será $\frac{5}{3}$; luego habrá que tomar, desde *m*, una magnitud igual á tres unidades y al extremo, darle de cota $8+5=13$; ó mejor, para que el punto *n* no resulte tan cerca del *m*, multiplicar la fracción por 5 y dividirla por 5, y será

$$\frac{5\times5}{3\times5}=\frac{25}{15};$$

y tomar $m\,n=15$ unidades, poniendo á *n* la cota $8+25=33$, y $m_8\,n_{33}$ será el plano pedido.

56. 9.° *Por un punto, trazar una perpendicular á una recta dada.*

Sea a_8 el punto y $b_3\,c_{18}$ la recta (fig. 50).

Por *a* se tira un plano *m n* perpendicular á la recta, se halla su punto de intersección $d_{9,2}$, el cual, unido á a_8, da la recta $a_8\,d_{9,2}$ buscada.

57. 10. *Por un punto* a_7, *trazar un plano perpendicular á otro* $m_3\,n_8$ (fig. 48).

Por *a* se traza una recta $a_7\,b_{27}$ perpendicular al plano *m n*, y por ésta un plano cualquiera. El problema tendrá infinidad de soluciones.

58. 11. *Por una recta, trazar un plano perpendicular á otro.*

Sea (fig. 51) $a_5\,b_{15}$ la recta y $m_3\,n_{13}$ el plano.

Por el punto a_5 de la recta se traza una perpendicular $a_5\,c_{20}$ al plano y por las *a b* y *a c*, un plano $r_5\,s_{20}$, que resuelve el problema.

Cambios, giros y abatimientos.

59. **Utilidad de estos medios auxiliares.**—La *Geometría descriptiva* (*), unas veces cambiando sus planos de proyección, otras haciendo girar los datos y resultados de un problema, otras abatiendo estos datos sobre uno de los planos de proyección, llega á conseguir mayor facilidad y claridad en la resolución de las cuestiones que se propone; y de una manera análoga, en el método de las *acotaciones* se auxilia de estos mismos medios, consiguiendo análogos resultados; pero siendo más limitadas las aplicaciones prácticas de este método, no se detallará de cada uno de ellos sino aquella parte de verdadera aplicación.

(*) En el método de representación por proyecciones.

Cambios de planos.

60. El único cambio usado es el de cambiar el plano de comparación por otro que le sea paralelo.

Los puntos acotados y referidos á un plano de comparación, pueden tener cotas positivas ó negativas, y se comprende lo fácil que es la omisión del signo menos en una cota negativa, la cual da lugar en la posición del punto á un error doble de su distancia al plano de comparación. En efecto, entre un punto de cota (6) y otro de cota (— 6), hay una diferencia

$$(+ 6) - (- 6) = + 12.$$

Por otra parte, el uso de las cotas positivas y negativas complica algo los problemas; por lo que la elección del plano de comparación debe hacerse, siempre que sea posible, de manera que todos los puntos queden por encima ó por debajo de este plano, pues de este modo, sus cotas tendrán el mismo signo. Sin embargo, no siempre será conveniente elegir el plano de comparación en estas condiciones. Las aplicaciones de este sistema á la Fortificación, á la Topografía y á las Construcciones, obliga algunas veces á tener que operar con planos de comparación distintos, aunque siempre paralelos, y este caso es el que se considerará.

61. **Cambio de un punto.**—Pueden ocurrir dos casos (figura 52):

1.° El nuevo plano $H' H'$ está por encima del primitivo $H H$.

Sea el punto a_{41} referido á HH y sea $H' H' = m\,n = 22$ la distancia que separa los dos planos. La nueva cota de a_{41} será $41 - 22 = 19$. Si el punto es b_0, su nueva cota será $o - 22 = -22$. Si fuera el c_{-15}, la nueva sería $-15 - 22 = -37$; luego para obtener las nuevas cotas de los puntos, basta restar, de las que ya tenían, la distancia que separa los planos.

2.° El plano $H' H'$ (figura de la derecha), es inferior al $H H$ en una cantidad $m' n' = 20$.

Si el punto es el a_5, su cota nueva será $(5 + 20) = (25)$.

Si es el b_0, la nueva será $(0 + 20) = (20)$.

Si es el c_{-5}, $(-5 + 20) = (+15)$, será la cota nueva.

Luego, á las cotas primitivas, con su signo, se les sumará la distancia que separa los planos.

Si se observa que en el primer caso la distancia $m n$ referida al plano $H H$, primitivo, es positiva, y en el segundo es negativa, se podrán reducir las dos reglas á una sola general.

Las cotas de los puntos, referidas á un nuevo plano de comparación paralelo al primitivo, se obtienen «restando de las cotas dadas, la distancia entre los dos planos, tomadas todas con su signo.»

62. **Cambio de una recta.**—Puesto que dos cotas determinan una recta, bastará cambiar las de dos de sus puntos y se tendrá hecho el cambio de ésta con relación al nuevo plano. Así, para cambiar de plano la recta $a_{-5}\, b_{-9}$ (fig. 53) de modo que sus cotas sean positivas, se tomará un plano $H H$, inferior al dado, por lo menos en (9) unidades. Si se elige uno que diste, por ejemplo, (10) unidades, las cotas de la recta, después del cambio, serán

$$(-5-[-10]) = (5),\ (-9-[-10]) = (-9+10) = 1,$$

y se convertirá la recta en la $a'_5\, b'_1$.

Si fuese la recta $c_{-5}\, d_{13}$, las nuevas cotas serían

$$(-5-[-10]) = (-5+10) = (5) \text{ y } (13-[-10]) = (13+10) = (23),$$

y la recta será la $c'_5\, d'_{23}$.

63. **Cambio de un plano.**—Estando determinado un plano por su línea de m. p., no hay sino cambiar esta línea para estar en el caso anterior.

64. Si después de hecho un cambio, determinadas las cotas referidas al nuevo plano y hechas en él operaciones, se quiere volver al sistema primitivo, se hace del mismo modo, teniendo

sólo en cuenta, al aplicar la regla, que la distancia que separa los planos, cambia ahora de signo, y que si era positiva ó negativa en el problema directo, ahora es, inversamente, negativa ó positiva.

Giros.

65. Siendo el objeto de los giros colocar algunos elementos planos de un problema, paralelos á los planos de proyección, eligiendo en general ejes perpendiculares ó paralelos á estos planos, y existiendo solamente el plano de comparación, no es posible servirse de los primeros ejes, puesto que, para poner rectas ó planos paralelos al de comparación, serían necesarios elegir ejes perpendiculares al otro plano, que aquí no existe. Sólo, pues, se podrán usar ejes paralelos al plano de comparación; y estos giros reciben entonces el nombre de abatimiento, siendo los únicos que tienen aplicación en esta parte.

Abatimientos.

66. Los abatimientos son ventajosos en muchos casos, puesto que reducen los problemas á operaciones de *Geometría plana*, siempre que los datos y resultados se hallen en un solo plano.

67. **Abatimiento de un punto.**—Para hallar el abatimiento de un punto a_9, situado en un plano $m_3\, n_9$ (fig. 54) bastará hallar la *charnela* (*), que será la horizontal de cota cero, y bajarla desde a una perpendicular, la cual será la hipotenusa $c_0\, A'_1$ de un triángulo rectángulo $a_9\, c_0\, A'_1$ en que, uno de sus catetos, es el $a_9\, c_0$, proyección de la perpendicular, y el otro será igual á 9 unidades. Llevando esta hipotenusa de c_0 á A_1, este punto será el abatimiento pedido.

En vez de tomar por charnela la traza de cota cero, puede tomarse una horizontal cualquiera, por ejemplo, la 3.3, y entonces un cateto del triángulo sería $a_9\, b_3$, y otro la diferencia $9-3=6$, y del mismo modo, A_1 sería el abatimiento pedido.

(*) Eje del giro.

68. **Una recta.**—Una recta se abatirá por dos de sus puntos, lo cual no puede presentar dificultad.

69. **Un plano.**—El caso que se suele presentar más frecuentemente es aquel en que el plano es vertical, y claro es que entonces todos sus puntos describen arcos cuyos radios son, de una longitud igual á sus cotas; así (fig. 55), los puntos a_8 b_{15} y c'_{12} d'_{21} que se hallan en un mismo plano vertical, abatidos, serán los representados en la figura por A_1, B_1 y C_1, D_1, en que $a A_1 = 8$ unidades, $b B_1 = 15$, $c' C_1 = 12$ y $d' D_1 = 21$.

70. **Casos particulares.**—En un problema en que existan varios puntos que abatir, lo mejor es empezar por el abatimiento de la escala de pendiente del plano y luego valerse de las horizontales.

1.° Abatir un plano m_7 n_{15} (fig. 56), que contiene un polígono *a.b.c.d.*

La escala de pendiente, abatida con su plano proyectante, es la $m N$, y $m N_1$ el abatimiento alrededor de la horizontal (7.7).

La horizontal que pasa, por ejemplo, por el vértice c, da el punto C' de la escala, el cual, una vez llevado sobre el abatimiento de aquella $m N$, dará el punto C, bastando entonces llevar la longitud $m C$ sobre la escala en m C'_1 y tirar la paralela á la horizontal hasta que encuentre á la perpendicular $c C_1$ trazada por c; C_1 será el punto pedido. Esta operación, repetida en todos los vértices, determinará el abatimiento $A_1 B_1 C_1 D_1$ del polígono.

71. 2.° **Problema inverso.**—Deshacer un abatimiento.

Sea un punto A_1 de un plano vertical cuya traza es $a b$ (figura 55); bajando desde A_1 la perpendicular $A_1 a$ y midiendo en la escala su longitud, que es 8, se tendrá la proyección a y la cota (8) del punto buscado.

Si el punto fuese el A_1 del plano $m n$ (fig. 54), se trazará la proyección de la línea de m. p. del plano que pasa por A_1, se abatirá esta línea de m. p. alrededor de la traza $c A_1$, valiéndose para

ello de dos horizontales cualquiera, y que en la figura han sido las de cotas (*o*) y (3), obteniéndose la $c_0 B'_1$; se llevará sobre ella la $c_0 A_1$ por un arco de círculo, y el punto A'_1 será el abatimiento del dado, alrededor de la charnela $c_0 A_1$, y su proyección sobre ésta será el punto *a*, cuya cota se obtiene trazando la horizontal del plano, que aquí es la de cota (9); siendo a_9 el punto pedido.

De la misma manera se operaría si el problema se compusiera de varias rectas, puesto que se podría ir deshaciendo el abatimiento por puntos.

Problemas de aplicación (*).

Mínimas distancias.

72. La mínima distancia entre dos puntos se halla por los métodos que se han indicado (párrafo 20), cuando vienen dados los puntos por sus cotas.

73. **Problema 1.º** *Sobre una recta* $a_4 b_7$, *y á partir de uno de sus puntos* a_4, *tomar una magnitud dada* m, *igual á* (16) *unidades* (figura 57).

La recta *a b*, viniendo dada por las cotas (4 y 7) de dos de sus puntos, se tendrá

$$\frac{a\,b}{a\,x} = \frac{L}{m}:$$

pero

$$L = \sqrt{(a\,b)^2 + (d)^2}\,;$$

luego

$$a\,x = \frac{a\,b \times m}{\sqrt{(a\,b)^2 + (d)^2}}$$

y llevando esta magnitud de (*a*) á (*x*), éste será el punto pedido, cuya cota se obtiene por la escala de pendiente de la recta.

(*) A resolver en clase en la pizarra y delineados en pliegos con datos diferentes.

El método del trapecio hubiera servido para tomar desde A_1 hasta X_1, la magnitud dada *m*.

El método del triángulo se podría emplear del mismo modo, si la recta viniese dada por la diferencia de cotas de sus extremos y por su proyección.

74. 2.º *Dividir una recta en partes proporcionales ó iguales.*

Bastará dividir del mismo modo la proyección y poner á los puntos las cotas que le resulten por la escala de pendiente de la recta.

75. 3.º *Hallar la mínima distancia de un punto* b_3 (fig. 50) *á un plano* m_8 n_{33}.

Se baja la perpendicular b_3 c_{18} del punto al plano (párrafo 54), y se halla su intersección $d_{9,2}$; la recta b_3 $d_{9,2}$ es la pedida, cuya verdadera magnitud se hallará como ya se sabe (párrafo 73).

76. También podría hallarse gráficamente trazando la línea de m. p. del plano, cuya proyección pasa por b_3 (fig. 58); pues abatiendo el plano proyectante de esta recta, llevará consigo la recta y el punto, desde el cual se bajará la perpendicular B_1 X_1, que dará la verdadera magnitud buscada.

La figura 59 representa el caso de que el plano *m n* sea vertical; la b_3 a_3 será la verdadera magnitud de la distancia pedida.

77. 4.º *Mínima distancia de un punto* a_8 *á una recta* b_3 c_{18} (figura 50).

Se tira por a_8 el plano m_8 n_{33} perpendicular á la recta (párrafo 65), y se busca el punto de intersección *d*; el cual, unido al dado, determinan la recta pedida a_8 $d_{9,2}$, cuya verdadera distancia se busca.

Puede emplearse otro procedimiento que consiste en hacer pasar un plano por a_8 y b_3 c_{18} (fig. 60) abatirle en B_1 C_1 alrededor de una horizontal, por ejemplo, la (8.8), y desde a_8 bajar la perpendicular a_8 x_1 á B_1 C_1, la cual será la verdadera distancia pedida.

78. La figura 61 representa el caso en que el punto y la recta

estén en un plano vertical. Se hace el abatimiento y se baja la $A_1 X_1$ perpendicular á $B_1 C_1$.

79. La figura 62 es para el caso en que el punto y la recta estén en un plano horizontal; siendo la $a_4 x_4$ la que resuelve el problema.

80. 5.º *Menor distancia entre dos rectas.*

Si las rectas son paralelas, se toma un punto en una y se halla su distancia á la otra.

Sean las rectas $a_{17} b_3$ y $c_{17} d_3$ (fig. 63); se puede trazar una horizontal (3.3) del plano que determinan y hacer girar éste alrededor de ella hasta ponerle paralelo al de comparación, y las $b A_1$ y $d C_1$ serán las posiciones de las rectas, entre las cuales se trazará la $d X_1$ perpendicular común, que será la recta pedida.

Si las rectas son verticales, su mínima distancia será la que une sus proyecciones.

Si se cortan, su mínima distancia será cero, y si se cruzan, la perpendicular común, que se determinará del modo siguiente:

81. Sean las rectas (fig. 64) $a_5 b_{20}$ y $c_5 d_{10}$; por el punto a_5 de la $a b$ se tira la $a e$ paralela á la $c d$, y se halla el plano $m n$ que determinan; desde el punto c_5 de la recta, se baja al plano $m n$ la perpendicular $c_5 f_{30}$, se halla su intersección $x_{16,8}$ con dicho plano y la $c_5 x_{16,8}$ será la más corta distancia, si se la determina en su verdadera magnitud.

82. 6.º *Menor distancia entre una recta y un plano paralelo.*

Se baja la perpendicular desde un punto de la recta al plano.

83. 7.º *Mínima distancia entre dos planos paralelos.*

Se hallará la distancia entre un punto de uno de los planos y el otro.

Puede también hallarse cortando los dos planos $m_5 n_{11}$ y $p_9 q_{15}$ (fig. 65) por uno vertical y que les sea perpendicular, tal como el $(t u)$. Su intersección con el $m n$, es la $a_5 b_{11}$, y con el $p q$, la $c'_9 d'_{15}$. Abatiendo estas dos rectas, que se hallan en el plano

vertical, darán las $A_1 B_1$ y $C_1 D_1$, cuya distancia es la perpendicular $R_1 S_1$, en su verdadera magnitud.

84. La figura 66 representa el caso de ser los planos dados verticales y paralelos, siendo su mínima distancia la $r_0 s_0$, perpendicular común á sus trazas.

Ángulos de rectas y planos.

85. **Ángulo de dos rectas.**—Cualquiera que sea la posición de dos rectas, siempre este problema quedará reducido á hallar el ángulo de dos rectas que se cortan, por lo cual será el único que se considere.

Sean (fig. 67) $a_{15}\ b_5$ y $a_{15}\ c_5$ las dos rectas que se cortan en a. El plano que determinan es el de las horizontales $(o\ .\ o)$, y $(5\ .\ 5)$; abatiéndole alrededor de su traza $(o\ .\ o)$, el punto a vendrá á A_1 y las rectas abatidas son $m\ A_1$; y $n\ A_1$; y $m\ A_1\ n$ será el valor del ángulo buscado.

En vez de abatir el plano alrededor de su traza $(o\ .\ o)$, podría haberse hecho alrededor de cualquiera horizontal, como, por ejemplo, la $(5\ .\ 5)$.

86. También puede resolverse, determinando la verdadera magnitud de los lados $m_0\ a_{15}$ y $n_0\ a_{15}$; y con el $m_0\ n_0$ construir un triángulo, cuyo ángulo opuesto á $m\ n$, será el pedido.

87. **Bisectriz.**—Después de hallado el ángulo de dos rectas se traza su bisectriz $A_1\ D_1$ y se deshace el abatimiento, encontrando la posición $a_{15}\ d_0$ de esta recta.

88. **Ángulo de rectas con planos.**—Se sabe que este ángulo es el formado por la recta con su proyección sobre el plano, ó el complemento del formado por la recta y la perpendicular al plano; en cuyo caso queda este problema reducido al anterior.

89. **Ángulo de planos.**—Se sabe también que el ángulo de dos planos es el suplemento del formado por dos perpendiculares trazadas desde un punto del interior del ángulo diedro que

forman; y, por consiguiente, que este problema se reduce también al del ángulo de dos rectas.

90. Puede resolverse directamente trazando un plano perpendicular á la común intersección de los dos dados y hallar el rectilíneo correspondiente al diedro.

Sean $m_5\ n_{20}$ y $p_5\ q_{20}$ (fig. 68) los planos dados, su intersección será la $r_5\ s_{20}$.

El plano perpendicular á ésta será el $t_{20}\ u_5$; su intersección con el *m n*, la $s_{20}\ v_5$, y con el *p q*, la $s_{20}\ x_5$; el ángulo rectilíneo será, pues, *v s x*, cuya verdadera magnitud se obtendrá haciéndole girar alrededor de la horizontal $v_5\ x_5$, siendo el α el ángulo pedido.

91. **Abertura de un diedro.**—El ángulo que dos planos, limitados en su común intersección, forman al cortarse, puede tener su abertura hacia el plano de comparación ó en sentido contrario; en el primer caso se dice que forman *arista* y en el segundo *gotera*.

Los planos *M N* y *N P* (fig. 69, lám. 3.ª), forman arista, y los *M' N' N' P'*, gotera.

92. Se reconoce con facilidad si dos planos forman arista ó gotera, cortándoles por un plano vertical cuya traza sea perpendicular á la proyección de la común intersección y viendo si el ángulo que forman las intersecciones de este plano con los otros dos, tiene su abertura hacia el plano de comparación ú opuesta á él.

En efecto, sean $m_5\ n_{12}$ y $p_5\ q_{12}$ (fig. 70 *a*) los planos dados; su común intersección es la $r_5\ s_{12}$. Por un punto *c*, de cota (8,3), tírese un plano *t u* vertical y perpendicular á la proyección *r s*, su intersección con el plano *m n* será la recta *c t* y con el *p q* la recta *c u*, y como el vértice tiene de cota (8,3) y el *t* y el *u* la (12), el ángulo *t c u*, que forman estas intersecciones, presenta su abertura hacia el observador y los planos forman gotera. Si los planos hubiesen sido los de la figura 70 *b*, el vértice *c* tiene una cota (13) mayor

que las de los lados; luego el ángunlo presenta su abertura opuesta al observador, y los planos forman arista.

En los abatimientos del ángulo *T C U* (fig. 70 *a*) y del *t C u* (figura 70 *b*), se ve con claridad lo anterior.

Observando estas figuras se ve, que al cortarse las horizontales de la misma cota, forman ángulos cuya abertura está vuelta hacia la parte descendente de la intersección, en el primer caso, y hacia la ascendente, en el segundo; y como las escalas de pendiente son perpendiculares á las horizontales, se verificará la inversa y se podrá deducir la regla siguiente:

93. **Regla.**—*Dos planos se cortarán formando gotera ó arista, según que las cotas de sus escalas de pendiente, prolongadas hacia su común intersección, vayan decreciendo ó creciendo respectivamente.*

94. **Caso particular.**—Si uno de los planos (fig. 71) $m_{10}\,n_{15}$ tiene sus cotas ascendentes en un sentido, y otro $p_{10}\,q_{15}$ en sentido inverso hacia la intersección de sus escalas de pendiente, se prolongarán éstas hasta más allá de su encuentro *r* como en la figura, y se elegirá la parte de ellas que tenga su crecimiento ó decrecimiento en el mismo sentido, y de esta parte se deducirá la posición del ángulo que forman en la parte dada.

En la figura 71, desde *r* á s_0 y á m_{10}, disminuyen las escalas de los dos planos, luego forman arista; así como en su opuesto por la arista *n r q*; y sus adyacentes *m r q* y *s r n*, formarán gotera.

Problemas de ángulos de rectas y planos. (*)

95. 1.° *Por un punto dado* c_{10} *trazar una recta que forme con otra* $a_{10}\,b_{20}$ *un ángulo dado* α (fig. 72).

(*) Para resolver en la pizarra en clase y delineados en pliegos con datos diferentes.

Por *c* y *a b* se hace pasar un plano y en él se traza la horizontal (10) del punto *c*; se hace el abatimiento de la *a b* alrededor de esta horizontal (10,10) en $a\ B_1$; y desde *c* se traza una recta $c\ D_1$ que forme con la $a\ B_1$ el ángulo α; y deshaciendo el abatimiento de D_1, se obtendrá el punto *d*, el cual, unido á c_{10}, dan la recta $c_{10}\ d_{22}$ que resuelve el problema, puesto que la cota de *d* será la que dé la escala de pendiente de la $a_{10}\ b_{20}$.

Si el punto está en la recta, el problema es indeterminado.

96. 2.° *Por un punto* a_4 *trazar una recta que forme un ángulo dado con un plano* $m_4\ n_{29}$ (fig. 73).

Este problema es indeterminado; si desde *a* se traza una perpendicular $a_4\ b_9$ al plano *m n*, el problema se reduce á trazar por *a* una recta que forme con esta perpendicular un ángulo α, complementario del dado; y como pueden trazarse infinitas, otras tantas serán las soluciones.

En la figura, y como ejercicio, se han hecho las construcciones siguientes para obtener la solución $a_4\ c_{6,8}$. Por a_4 se ha trazado una horizontal cualquiera $a_4\ h_4$, y tomándola como charnela, se ha abatido la recta anterior, el punto *b* ha venido á B_1, para lo cual se ha bajado la perpendicular *b e*, se ha construído el triángulo *b B e*, en que *b B* es igual á $9 - 4 = 5$ unidades, y se ha llevado la hipotenusa desde *e* á B_1; siendo $a\ B_1$ el abatimiento de la *a b*. Se ha trazado la $a\ C_1$, que forma con la anterior el ángulo α. complementario del dado, y se ha deshecho el abatimiento de un punto de esta recta, tal como el C_1, valiéndose de la horizontal $C_1\ D_1$; con lo que se ha obtenido *c*, que unido á *a*, han determinado la $a_4\ c_{6,8}$, solución buscada.

97. 3.° *Angulo que una recta* $a_8\ b_{15}$ (fig. 74) *forma con el plano de comparación.*

Si este ángulo se quiere obtener por la tangente, basta medir $a\ b = 16$ en la escala del plano y hallar la diferencia de cotas de b y a, $(15 - 8) = 7$, y $\frac{7}{16} = \text{tag}\ \alpha$, será la tangente buscada.

Si lo que se desea es el ángulo, por su amplitud, bastará emplear el método del trapecio ó del triángulo como al tratar de determinar la longitud verdadera de la recta a_8 b_{15}, y el ángulo que esta recta abatida forma con la paralela á su proyección, es el ángulo pedido, que puede medirse en grados.

98. 4.° *Por un punto a_8 dado, trazar una recta de pendiente también dada* $\frac{7}{16}$.

Por el punto *a* se traza una recta cualquiera, se toma sobre ella una magnitud $a\,b = 16$ unidades de la escala, y al punto *b* se le pone una cota igual á la de *a* más ó menos el numerador 7; y las rectas a_8 b_{15} ó a_8 b'_1, son soluciones. Si por *a* se trazan rectas iguales á *a b* y en su extremo se pone la cota (15) ó (1), todas estas rectas *a c*, *a d*, *a e*, etc., serán también soluciones, y la regla para determinarlas todas, será describir una circunferencia desde *a* como centro y con un radio igual á tantas unidades como haya en el denominador de la fracción que indica la pendiente, poner á esta circunferencia una cota igual á la de *a*, más ó menos el denominador de la tangente, y las rectas acotadas que van de *a* á la circunferencia son las soluciones.

99. Si la pendiente fuese muy grande, en cuyo caso el denominador de la escala sería muy pequeño y también el radio de la circunferencia; es conveniente multiplicar por un mismo número los dos términos de la fracción que expresa la pendiente. Así, si fuese $\text{tag} = \frac{25}{1}$, se podrían multiplicar por 10, obteniéndose $\text{tag} = \frac{250}{10}$, con lo cual, el radio sería 10 unidades, sin que la pendiente hubiese variado.

100. 5.° *Dada una recta* a_3 b_{19} (fig. 75) *en un plano* m_3 n_{19}, *hacer pasar por ella otro plano que forme con el* m n *un ángulo dado.*

La traza de un plano perpendicular á *a b* puede ser la *e f* de

cota (3), que corta en e á la horizontal (3) de $m\ n$; la $a\ b$ puede abatirse en $a\ B_1$ y desde f trazarla una perpendicular $f\ C_1$, llevar C_1 en C'_1, el cual, unido con e, dará la $e\ C'_1$, abatimiento de la intersección de $m\ n$ con el plano auxiliar $e\ f\ d$, perpendicular á $a\ b$. En C'_1, una rècta $C'_1\ d$ que forme con la $e\ C'_1$ el ángulo α dado, y el punto d con la recta $a\ b$ determinan un plano, que es el pedido, y cuya escala de pendiente es la $r_3\ s_{19}$.

101. 6.° *Plano bisector de un diedro.*

Sean (fig. 68, lám. 2.ª) $m_5\ n_{20}$ y $p_5\ q_{20}$ los planos; se hallará el ángulo $v\ S_1\ x$, que forman las caras (párrafo 90), se trazará su bisectriz $S_1\ z$, y por ésta y la intersección se hará pasar un plano que será el bisector. La recta que una r_5 con z_5 será la dirección de las horizontales de este plano.

102. 7.° *Hallar el ángulo de un plano con el de comparación.*

Este problema queda reducido á hallar el ángulo que su línea de m. p. forma con el de comparación.

103. 8.° *Por una recta dada* $a_3\ b_{15}$ (fig. 76, lám. 3.ª), *trazar un plano que forme con el de comparación un ángulo dado, cuya* $\text{tag} = \frac{2}{5}$.

Por un punto cualquiera de la recta, se trazan todas las que formen el ángulo dado (párrafo 98). Todos los planos que tengan estas rectas por líneas de m. p. formarán el ángulo pedido, pero entre ellos hay que elegir los que además pasen por la recta $a_3\ b_{15}$. Las horizontales de estos planos, siendo perpendiculares á las líneas de m. p., serán tangentes á la circunferencia y tendrán la cota (7), luego si desde el punto de cota (7) de la recta $a\ b$, se tiran tangentes á esta circunferencia, éstas serán las horizontales de los planos pedidos, y el problema tendrá dos, una ó ninguna solución, según que el punto e de cota (7) esté fuera de la circunferencia, en ella ó dentro: ó lo que es lo mismo, según que la pendiente de la recta dada sea *menor*, *igual* ó *mayor* que la que se pide para el plano.

104. Si la recta *a b* (fig. 77) fuese horizontal, queda reducido á trazar las tangentes paralelas á la horizontal *a b*; y *m n* y *r s* serán las dos soluciones que en este caso tendrá siempre el problema.

El ángulo que las *m n* y *r s* forman con el plano de comparación, no es otra cosa que el rectilíneo correspondiente al diedro formado por los planos; de los cuales son líneas de m. p.

105. 9.° *Por un punto* a_7 *de un plano* $m_7\ n_{15}$ (fig. 78), *trazar en él una recta cuya pendiente sea* tag $= \frac{1}{3}$.

Por el punto *a* se trazan las rectas de pendiente igual á

$$\frac{1}{3} \text{ ó } \frac{4}{12} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4},$$

multiplicando y dividiendo por 4; y entre ellas se elige las que estén en el plano, para lo cual se trazará la horizontal de cota (11), igual á la de la circunferencia; y los puntos de intersección *b* y *c* unidos con *a*, dan las soluciones del problema, que tendrá dos, una ó ninguna, según que la horizontal corte en dos puntos á la circunferencia, sea tangente á ésta ó exterior; lo que equivale á que la pendiente dada sea *mayor, igual* ó *menor* que la del plano *m n*.

III

Líneas curvas y superficies.

106. **Representación de líneas curvas en general.**—Toda línea curva, pudiendo ser sustituída aproximadamente por una línea quebrada, su representación quedará reducida á la de ésta, y, por consiguiente, á la de sus vértices, puesto que los lados quedarán determinados tan sólo con unir estos puntos. La curva estará tanto mejor determinada, cuanto mayor sea el número de puntos comunes que tenga con la quebrada y cuando para éstos se elijan los que marcan los cambios de curvatura.

Así, la curva (fig. 79) que resulta de unir por un trazo continuo las proyecciones de estos puntos, es la proyección de una curva en el espacio, y las cotas son las correspondientes á sus vértices. Los puntos no acotados se supone tienen la misma cota que los correspondientes al lado de la quebrada que está inscripta en aquella parte de la curva.

107. **Curvas planas y de doble curvatura.**—*Su representación.*—Las curvas pueden ser planas ó de doble curvatura.

Las primeras son aquéllas en que todos sus puntos están en un plano, y las segundas, las que no satisfacen á esta condición.

Como una misma proyección puede corresponder á varias curvas, se indicarán éstas acentuando las cotas. Así dos curvas estarán representadas (fig. 80), la primera por las cotas (5.4.6.5.

3.5.7.8.10.12), y la segunda por las (20′, 15′, 12′, 10′, 13′, 15′, 17′, 18′, 19′, 21′, 23′).

108. **Posiciones de las curvas.**—Las curvas planas pueden tener tres posiciones: oblicuas, paralelas, ó perpendiculares al plano de comparación. Las primeras están determinadas por la proyección horizontal de la curva y tres de sus cotas, puesto que estos tres puntos determinarán el plano de la curva y las cotas de los restantes se hállarán por el problema de, *dada la proyección de un punto de un plano, hallar su cota.*

Sean *a b c d* (fig. 81), la proyección de la curva y (5.7.3) las cotas de sus puntos. Las dos rectas $a_5\, b_7$ y $b_7\, c_3$, determinan el plano cuya escala de pendiente es la $m_5\, n_7$.

La cota (5.6) del punto *d*, se hallará por la horizontal del plano que pasa por este punto.

109. Las curvas horizontales, teniendo en todos sus puntos la misma cota, quedan determinadas conociendo su proyección horizontal y la cota de uno de sus puntos. Así, la curva $a_{10}\, b_{10}$ (fig. 82), representa una curva horizontal.

110. Las curvas planas verticales (fig. 83), tienen por proyección una recta, que es la traza del plano proyectante. Una curva de esta especie queda determinada por una recta como proyección y por las cotas de sus puntos.

Una curva vertical y una recta, se diferencian en que, en la primera, á proyecciones iguales, no corresponderán diferencias iguales de cotas como en la recta.

111. Si en el mismo plano proyectante existen varias curvas, como las (6,5.8,6.11.12,5.13,6.17,4) y (4′.3,5′.4′.7′.6,5′.6,3′.10,5′), se distinguirán sus cotas por los acentos; y análogamente, si hubiera rectas y curvas.

112. Si las curvas son cerradas, á cada proyección corresponderán, por lo menos, dos cotas, como en la figura 84.

113. Las curvas planas pueden obtenerse en su verdadera magnitud, tan sólo con abatir sobre el de comparación el plano

en que se hallan colocadas, y con él los puntos de la curva; excepto cuando son horizontales, puesto que entonces ya están en su verdadera magnitud, en la proyección.

Si las curvas son verticales, el abatimiento es más sencillo y se hace como se ve en la figura 83, en $A_1 B_1$ y $C_1 D_1$.

114. **Curvatura de las curvas.**—Para hacer mejor el estudio de la curvatura de las curvas, conviene comparar su posición con la de sus tangentes, para lo cual, se empezará por las curvas horizontales que se proyectan en su verdadera magnitud.

Tres posiciones puede ocupar la tangente á una curva respecto á ésta y al observador: 1.ª, la tangente está, como en la figura 85, entre el observador *o* y la curva, en las inmediaciones del punto de contacto *c*; 2.ª, más allá de la curva y del otro lado del observador *o*, como en la figura 86, y 3.ª, dejando á la curva á un lado y á otro, como en la figura 87. En el primer caso, la curva se llama *convexa* con relación al observador que la mira desde *o*; en el segundo, *cóncava*, y en el tercero, *cóncava convexa*.

Toda curva como la $c_4 c_4$, que siendo en una parte convexa ó cóncava, varía la curvatura para hacerse cóncava ó convexa, tiene un punto en el cual se verifica el cambio de curvatura. Este punto se llama de *inflexión* y es en el que la tangente deja á la curva á un lado y á otro.

115. **Modo de reconocer la curvatura de una curva plana.**—La curvatura de las curvas planas se reconoce por la de su proyección.

Si la curva es convexa, cóncava ó de inflexión, su proyección también lo será; puesto que ésta no es otra cosa que la intersección del plano horizontal con la superficie que se forma proyectando sobre él la curva; y según que ésta sea convexa, cóncava ó de inflexión, también lo será la proyección. En la figura 88, se ve en perspectiva la curva *A A*, su proyección *a a* y la superficie proyectante.

116. **Caso de curvas verticales.**—Las proyecciones de las

curvas verticales, siendo rectas, no pueden indicar la clase de curvatura de estas líneas, pero lo indican sus cotas. En efecto, imagínese una recta a_4 b_{20} (fig. 89), abatida sobre el plano de comparación y construída su escala de pendiente; á las partes iguales (4.6), (6.8), (8.10), etc., de proyección, corresponden diferencias de cotas iguales á dos unidades; pero si en vez de dividir la a_4 b_{20} en partes iguales, se van tomando á partir del 4, magnitudes que vayan creciendo y siempre mayores que la (4.6) (fig. 90), se obtendrá una línea quebrada, convexa hacia la recta, puesto que sus vértices estarán todos por debajo de los correspondientes de ésta, según se ve en el abatimiento.

La curva que la sustituya, presentará su concavidad al plano de comparación ó será convexa para el observador colocado mirando la proyección sobre el plano horizontal.

Si, por el contrario, se hubiesen tomado magnitudes menores que la (4.6) y siempre decrecientes (fig. 91), la línea quebrada quedaría por encima de la recta, volviendo su convexidad al plano de comparación y presentándose cóncava al observador.

Si la curva fuese tal, que á partir, por ejemplo, del punto (4) (figura 92), se tomasen magnitudes mayores que (4.6) y crecientes hasta el punto (10) y desde éste empezasen á decrecer, la curva de (4) á (10) sería convexa, y de (10) á (16) cóncava, habiendo, por lo tanto, en (10) un punto de inflexión.

117. **Regla.**—La proyección y cotas de una curva vertical, pueden bastar para conocer la curvatura de esta línea y acusar los puntos de inflexión, si los hay.

En efecto, *si á diferencias iguales de cotas, corresponden proyecciones horizontales que vayan en aumento en la parte ascendente de las cotas, la curva será convexa para el observador; si, por el contrario, va en disminución, será cóncava; y si tiene trozos en que aumenta en unos y en otros disminuye, presentará convexidades y concavidades; y en cada punto de cambio de curvatura, existirá un punto de inflexión.*

Tangentes y rasantes á las curvas.

118. **Tangentes.**—Se sabe por *Geometría*, que si una recta $s\,s'$, secante á una curva a (fig. 93), gira en el plano de ésta alrededor de uno de sus puntos de sección s y de modo que el otro s' vaya acercándose sucesivamente al anterior, la parte de secante $s\,s'$ irá disminuyendo y llegará un momento en que s' se unirá á s. La secante, entonces, llega á su límite y recibe el nombre de tangente á la curva en el punto s; pudiendo definirse diciendo, que tangente á una curva, es el límite de las posiciones de una secante que gira alrededor de uno de sus puntos de sección, hasta que este punto se una con el otro.

119. *Ejemplos:* Se ha visto que las curvas presentan cambios de curvatura, y pueden existir rectas que las sean tangentes solamente ó tangentes y secantes á la vez. La figura 94 representa una tangente en la $t\,t'$ y una tangente y secante en la $s\,s'$; siendo tangente en el punto b, y secante en los c y d.

120. **Tangentes á curvas planas por uno de sus puntos.**—Si $a_8\,b_5\,d_2$ (fig. 95), es la proyección de una curva plana y hay que tirarla una tangente en el punto c; se trazará la tangente $t\,t'$ á la proyección, y esta recta será la proyección de la tangente buscada; y las cotas de dos de sus puntos, como las $c_{3,2}$ y e_8 se determinarán, trazando el plano de la curva, para lo cual, se han buscado en las rectas $d_2\,b_5$ y $a_8\,b_5$ los puntos de cota (6), los cuales, unidos, dan la horizontal del plano.

121. Si la curva fuese horizontal, su tangente también lo sería; siendo su cota la misma del plano de la curva. La $t_6\,t_6$ es la tangente á la curva horizontal (6.6), en el punto c (fig. 85).

122. **Idem por un punto fuera de la curva.**—Si el punto está en el plano de la curva, pero fuera de ella, como el t'_{10} (fig. 95),

se trazará desde t'_{10} la tangente á la proyección de la curva, y la cota del punto de tangencia $c_{3,2}$, unida á la del punto dado t'_{10}, determinan la tangente $t'_{10}.c_{3,2}$. Si la curva es horizontal, se resuelve del mismo modo, pero con más sencillez.

123. **Idem paralelas á una recta dada.**—Si la recta dada es la $m_{15,2}$ n_{20}, basta trazar una tangente t' t, á la proyección de la curva, de modo que sea paralela á la de la recta dada, y acotado el punto de tangencia c, se determinará otra cota, tal como la e_8, valiéndose de la recta m n, á la cual es paralela.

124. **Tangentes á las curvas de doble curvatura.**—Las curvas de doble curvatura, no teniendo sus elementos en un plano, no siempre es posible trazarlas tangentes. Observando que la línea curva puede sustituirse aproximadamente por una quebrada inscrita, cada dos lados de ésta, determinarán un plano, y la curva, en esta parte, puede considerarse como plana; quedando reducido el problema de tirar una tangente por uno de sus puntos, al mismo caso de las curvas planas.

125. **Por un punto de la curva.**—Si la curva es la a b d (figura 96), y el punto por donde se ha de tirar la tangente el a_3, se observará que este punto forma parte de los elementos a_3 n_6 y a_3 m_2 que están en un plano; y bastará tirar la tangente t t' cuyas cotas se determinan por las del plano n_6 a_3 m_2.

Si el punto es el c, lo primero será determinar su cota, y después, observando que este punto, por pertenecer al lado (7.6.), puede combinarse con el elemento anterior (5.7.) ó con el posterior (6.3.), dará lugar á dos soluciones aproximadas; una en el plano (5.7.c.6) y otra en el (7.c.6.3).

126. **Idem fuera de la curva.**—Si el punto está fuera de la curva, como el p_5, para que el problema tenga solución, es preciso que la tangente esté en el plano de los dos elementos lineales de la curva en las inmediaciones del punto de contacto.

Se traza la tangente p t' á la proyección de la curva; los dos elementos (3.6) y (3.2), inmediatos al punto de contacto a_3, deter-

minan un plano, que deberá ser el de la tangente $p_5\,a_3$. Si esta recta está contenida en el plano, será la solución buscada; de lo contrario, el problema no la tiene.

Del mismo modo se resolverá cuando se trate de una tangente paralela á una recta.

En la figura 96 se ve que la proyección de la tangente tendrá que ser la recta $p\,t'$, y como los elementos $a_3\,n_6$, $a_3\,m_2$ determinan un plano y la $p_5\,a_3$ no está en él, el problema no tiene solución en este caso; pero sí la tendría si la recta hubiese estado contenida en el plano.

127. **Aplicaciones á curvas verticales.**—En las aplicaciones á la Topografía y Fortificación, ocurre frecuentemente tener que trazar tangentes á curvas en planos verticales; y este problema queda reducido á los anteriores, valiéndose del método del abatimiento (párrafo 69).

1.° **Punto en la curva.**—Sea $m\,n$ la curva dada y a'_{20} el punto por donde se ha de trazar la tangente (fig. 97).

Se abate la curva en $M_1\,N_1$ y el punto a en A_1; por éste se tira la tangente geométrica á $M_1\,N_1$, la cual se prolonga hasta que encuentre en t_0 á la traza $m\,n$ del plano, en cuyo punto tendrá la cota (0), y $t'_0\,a'_{20}$, será la tangente pedida.

Si al prolongar la tangente, cortase muy lejos ó no cortase á la traza $m\,n$, se determinará otra cota tirando, por ejemplo, la horizontal (15); el punto B_1 de intersección, tendrá esta misma cota; siendo $b'_{15}\,a'_{20}$ la tangente.

128. 2.° **Punto fuera de la curva.**—Si el punto para trazar la tangente está fuera de la curva, pero en su plano, como el b'_{15}, se hará el abatimiento de la curva y del punto, y desde B_1 se trazará la tangente $B_1\,A_1$, y deshaciendo el abatimiento se obtendrá la proyección y cota del punto de tangencia a'_{20}; siendo $b'_{15}\,a'_{20}$ la tangente pedida.

129. 3.° **Paralela á una recta.**—Si la tangente que se pide ha de ser paralela á una recta dada $c''_5\,d''_{18}$, se hará del mismo

modo el abatimiento de la curva y de la recta, y en él se trazará la tangente $A_1 B_1$, paralela á la $C_1 D_1$, y deshaciendo el abatimiento se tendrá la proyección $a' b'$ de la tangente, cuyas cotas se obtienen con facilidad.

130. **Curvas cóncavas y de inflexión.**—Si las curvas fuesen cóncavas (fig. 98), las construcciones se hacen del mismo modo: así como también cuando presenten una inflexión (figura 99).

También puede suceder que el problema tenga más de una solución, como se ve en la figura 100, en las tres b'_{16} d''_5, b'_{16} $a_{14,5}$ y b'_{16} c'_{23}.

131. **Casos en que no hay soluciones.**—Los casos que se acaban de examinar han tenido solución por la disposición de los datos; pero los puntos para trazar las tangentes ó las rectas á quienes han de ser paralelas, pueden estar dispuestas de tal modo, que no sea posible el problema. En efecto, en la figura 97, si el punto fuese el d''_{18}, puede verse esta imposibilidad, á causa de ser la curva limitada; y del mismo modo, si en la figura 98 se pide una paralela á la recta e''_{28} f''_{20}, basta ver el abatimiento $E_1 F_1$ y la curva $M_1 N_1$, para cerciorarse de ello.

132. **Rasantes á las curvas.**—En los casos en que no es posible trazar tangentes á las curvas verticales, por la posición especial de los datos, ó cuando se quiere trazar rectas que, pasando por un punto se apoyen en la curva; dejando á ésta encima ó debajo, se sustituyen las tangentes por otras rectas que satisfagan á esta condición, y á las que se las da el nombre de *rasantes*.

El problema de trazar las rasantes se resuelve de un modo análogo al de las tangentes por un punto fuera de la curva.

Sea *m n* la curva (fig. 101), y p'_{15} el punto por donde se ha de trazar una tangente ó rasante. El abatimiento indica la imposibilidad de trazar una tangente, pero en cambio puede trazarse la rasante $P_1 B_1$, cuya proyección y cotas son las p'_{15} b'_{23}. La $P_1 C_1$

es otra solución, y según que se desee la rasante superior ó la inferior, así se elegirá una ú otra.

En la figura 102 se ven las dos tangentes $P_1 A_1$ y $P_1 B_1$ y las dos rasantes $P_1 C_1$ y $P_1 D_1$, siendo la $P_1 C_1$ la rasante superior.

Superficies poliédricas.

133. **Representación de un poliedro cualquiera.**—La representación de un poliedro por el sistema de acotaciones es muy sencilla sabiendo ya determinar puntos, rectas y planos. Los vértices y lados bastarán para su representación, y cuando sea precisa la magnitud de sus caras, podrán obtenerse por los planos que la contienen, mediante los abatimientos ó la determinación de las magnitudes verdaderas de los lados y ángulos que forman los polígonos. El desarrollo de sus caras se puede obtener de un modo análogo al empleado en la *Geometría descriptiva* en el método de las dos proyecciones, que consiste en construir en un plano todas las caras, unas al lado de otras, en el orden en que se hallan en el poliedro; para lo cual, se conocen ya los lados y ángulos de cada cara.

134. **Representación de la pirámide.**—El vértice y la base determinan una pirámide, puesto que uniendo aquél con cada uno de los vértices de ésta, todas las aristas quedarán acotadas.

Si v_8 es el vértice y $a_0\ b_0\ c_0\ d_0\ e_0$ la base, la representación será la indicada en la figura 103.

En general, la base se supone en el plano de comparación, y si estuviese en otro plano cualquiera, bastaría hallar las trazas de las aristas laterales y unirlas convenientemente para tener esta base.

135. **Representación del prisma.** — La base acotada y la dirección y longitud de las aristas determinan el prisma (figura 104).

Si $a_0\, b_0\, c_0\, d_0\, e_0$ es la base y $m_0\, n_8$ la dirección y longitud de las aristas, se trazarán por los vértices de la base, paralelas á la $m\,n$, las cuales serán las aristas laterales, y sus extremos, los vértices de la cara superior (*).

Secciones planas.

136. El problema de las secciones planas en el sistema de acotaciones, se reduce á ir determinando la intersección del plano con las caras del poliedro ó con las aristas (**).

137. **Sección plana de una pirámide.**—*Primer método.*— Sea la pirámide $v_9\, a_0\, b_0\, c_0\, d_0\, e_0$ y el plano $m_0\, n_9$ (fig. 105).

Se halla primero la intersección $k\,h$ del plano $m\,n$ con la cara $v\,a\,b$, valiéndose de las horizontales $a_0\, b_0\, v_9\, k_9$ y se toma de esta intersección la parte $a'\, b'$ comprendida en la cara $v\,a\,b$. Las cotas se hallarán por las escalas de pendiente de las aristas $v\,a$ y $v\,b$. Se halla después la intersección $a'\, e'$ del plano $m\,n$ con la cara siguiente $v\,a\,e$, y así se continúa hasta determinar la $a'\, e'\, d'\, c'\, b'\, a'$, que es la sección pedida.

138. *Segundo método.*—También podría emplearse (fig. 106) el método de la intersección de cada arista con el plano, pero, en general, es más expedito el que se ha indicado. El punto a' será la intersección de $m\,n$ con la arista $v\,a$, el b' la intersección con $v\,b$....., etc., y $a'\, b'\, c'\, d'\, e'$ la sección plana pedida.

(*) De los prismas colocados horizontalmente se hacen muchas aplicaciones en los problemas de Fortificación.

(**) La marcha es análoga á la seguida en el método de las proyecciones de la *Geometría descriptiva.*



139. **Magnitud de la sección.**—Abatiendo el plano *m n* con la intersección, se tendría su verdadera magnitud. La de las aristas de la pirámide, así como las distancias de los vértices á la sección, permitirían hacer el desarrollo de la pirámide sobre un plano y el de las líneas de la sección.

140. Si el plano fuese paralelo á la base, se determinaría solamente una cota de la sección, puesto que ésta será semejante á la base y todos los lados serán paralelos á sus homólogos.

141. **Sección plana de una prisma.**—Sea el prisma a_4 b_4 c_4 d_4 e_4 a'_9 b'_9 c'_9 d'_9 e'_9 (fig. 107) y el plano m_4 n_9. Se halla la intersección *s r* de *m n* con la cara *a b'*, valiéndose de las horizontales 9 y 4; después la *h i*, del mismo *m n*, con la *b c'*, recurriendo al plano auxiliar r'_4 s'_9 para obtener un punto *i'* de la intersección, el cual, unido con la *h*, da la *i h*. Los demás puntos *j* y *f* se pueden obtener directamente por la intersección de *m n* con las caras. La intersección es la *g h i j f g*; pudiéndose determinar las cotas de todos los vértices, por pertenecer á rectas acotadas.

Intersección de una recta con un poliedro.

142. **Intersección de una recta con una pirámide.**—La intersección de una recta a_2 b_{14} (fig. 108), con una pirámide, está reducida á hallar la intersección de ésta con un plano que se haga pasar por la recta, y los puntos de intersección de esta sección con *a b* serán los buscados.

Entre los planos que pueden elegirse, pasando por la recta, el mejor será el proyectante de ésta ó el que pase por ella y el vértice. El primero podrá abatirse con facilidad; el segundo dará por sección líneas rectas.

En la figura se ha seguido este segundo método; la recta a_2 b_{14} y el vértice v_{14}, han determinado el plano auxiliar que corta á la

pirámide según las rectas $v_{14}\,c_0$ y $v_{14}\,d_0$; y éstas, á su vez, están cortadas por $a\,b$, en m y n, que son los puntos de intersección, y cuyas cotas se determinan por las de la recta $m\,n$.

Si la horizontal (0.0) del plano, no hubiese cortado á la base de la pirámide, la recta tampoco la hubiese encontrado y el problema no tendría solución.

143. **Idem con un prisma.**—Los planos proyectantes de la recta, ó los que pasando por ella, son paralelos á las aristas, son los más convenientes para hallar esta intersección.

La figura 109 da un ejemplo de este último caso; $a_1\,b_{12}$ es la recta; $b_{12}\,c_0$ la paralela á las aristas: $c_0\,d_0$ la horizontal de cota (o) del plano que determinan: e_0 y f_0 los puntos de intersección de esta recta con la base; $e\,e'$ y $f\,f'$ la sección causada en las caras del prisma por este plano, y m y n los puntos buscados; cuyas cotas son fáciles de determinar por ser de la recta dada $a_1\,b_{12}$.

Superficies curvas.

144. Las superficies curvas geométricas, conocidas por la *Geometría* elemental, son las cónicas, cilíndricas y esféricas; las dos primeras son de utilidad en las aplicaciones de los planos acotados; pero no así la tercera, de la cual se prescindirá.

145. **Superficie cónica.**—La curva directriz $a_7\,b_6\,c_{11}\,d_{10}$ (figura 110) y el vértice v_{21}, determinan esta superficie; puesto que bastará unir este punto con cada uno de la curva para tener acotada la generatriz que pasa por aquel punto. Así, $v_{21}\,a_7$, $v_{21}\,b_6$, $v_{21}\,c_{11}$, $v_{21}\,d_{10}$....., etc., son las generatrices que pasan por a, b, c, d....., etc., y lo mismo se determinarán las demás.

Como la curva directriz tiene que ser dada por la línea quebrada que la sustituye, en rigor, en vez de una superficie cónica, se tendrá una pirámide, que se aproximará tanto más á la cónica,

cuanto mayor sea la aproximación con que está determinada la curva directriz. Reducida de este modo la superficie á una pirámide, á esta figura habrá que referirse, para su determinación y representación.

146. **Determinación de la cota de un punto.**—Un punto m, de la superficie, podrá quedar determinado; pues bastará unirle con el vértice para tener la generatriz $v_{21}\, c_{11}$ que pasa por él, y su cota (15), se hallará por medio de la escala de pendiente de esta recta.

Recíprocamente, si se desea obtener el punto que tenga una cota dada, se buscará esta cota sobre cada generatriz, y unidas por un trazo continuo, darán la curva; cuyos puntos tienen por cota la dada. En la figura se ha hallado la de cota (15).

Si la directriz es plana, se trazará la escala de pendiente de una generatriz, y por medio de paralelas se pueden obtener las cotas de los puntos que se necesiten en otras generatrices; así se ha obtenido la cota (15) del punto m (fig. 111), y con ellas las restantes de la curva (15).

147. **Superficie cilíndrica.**—La curva directriz y la recta generactriz bastan para determinar esta superficie de un modo análogo á la cónica; y con sólo ver la figura 112 pueden repetirse los razonamientos hechos para aquélla, aplicables en un todo á estas superficies.

148. **Sección plana de una superficie cónica ó cilíndrica.**—La intersección de un plano con una superficie cónica ó cilíndrica se halla análogamente á la sección plana de una pirámide ó prisma, con la diferencia de que la curva de sección se determina por puntos y con tanta más aproximación cuanto mayor sea el número de generatrices que se tracen en su superficie.

149. **Intersección con una recta.**—Se resuelven estos problemas de un modo análogo al caso de una pirámide ó de un prisma, por lo cual no se repiten.

Superficies irregulares.

150. **Método general de representación de estas superficies.**—Las superficies no geométricas, que son aquellas cuyas generación es desconocida y que constan de una serie de irregularidades sin forma alguna de superficies geométricas, no será posible representarlas por el sistema de las acotaciones, sino llenando el plano con las proyecciones acotadas de un número de puntos, tanto mayor cuanto mayor sea la exactitud que se desee; pero á medida que aumenta el número de puntos acotados, la proyección va haciéndose más confusa porque la aglomeración de cotas impide se destaque la forma de la superficie; y de aquí que haya sido necesario recurrir á otro método distinto del de puntos aislados y de cotas arbitrarias. Por irregular que sea la forma de una superficie, si se la supone cortada por planos paralelos al horizontal de comparación y trazados á diversas alturas (fig. 113, lámina 4.ª), sus secciones con la superficie serán curvas horizontales *a c*, *b d*....., etc., cuyos puntos tendrán la misma cota para cada curva; de aquí que, trazando su proyección horizontal, el número que indique la cota del plano de la sección, será también la cota de todos los puntos de la curva. El examen de este método hace ver que son innecesarias un número considerable de cotas y podrán suprimirse otras muchas si se hace que estas curvas sean las causadas por planos horizontales distantes entre sí la misma cantidad, puesto que bastará saber la cota de una de ellas y la distancia que separa á dos consecutivas, para tener la cota de todas las curvas trazadas, y por consiguiente, la de todos sus puntos.

151. **Generalización del método.**—Este sistema, aplicado á esta clase de superficies, no es nuevo y exclusivo para ellas, sino que se viene empleando desde el principio de estas lecciones.

En efecto, la proyectante horizontal de un punto, se supone dividida en tantas unidades de la escala como expresa la cota de este punto, lo cual equivale á suponer que un plano horizontal se va moviendo paralelamente á sí mismo y deteniéndose á cada unidad que sube, marcando así los puntos 1.2.3.4.5.....

En la recta pasa una cosa análoga, puesto que al determinar su escala de pendiente no se hace más que encontrar su intersección con los planos horizontales distantes, 6, 7, 8, etc., unidades del de comparación.

En el plano, sus horizontales no son sino sus intersecciones con planos horizontales distantes 1, 2, 3,..... unidades.

En las superficies geométricas también la determinación de los puntos de igual cota dan las secciones horizontales.

En resumen, las secciones horizontales y equidistantes, son el fundamento del método de representación por los planos acotados, y su exactitud es tanto mayor cuanto más pequeña es la distancia que separa estas secciones entre sí.

152. **Zonas en las superficies.**—A la parte de superficie comprendida entre dos secciones consecutivas se la llama *zona*; y *altura* de ésta, á la distancia que separa los planos paralelos que la determinan; así a_{11} c_{11} y b_{10} d_{10} determinan una zona cuya altura es la unidad; y en la figura 114, a_{15} c_{15} y b_{10} d_{10}, representan otra zona de altura igual á cinco unidades.

Los puntos de la superficie de las zonas quedan sin acotar, puesto que sólo existen las cotas de las curvas horizontales que las forman; pero se puede conseguir la determinación completa de toda la superficie, de una manera aproximada, sustituyendo las superficies irregurales de estas zonas, por otras geométricas, cuya generación vamos á indicar.

153. **Generación de las zonas.**—Supongamos la proyección a_{11} c_{11} y b_{10} d_{10} (fig. 113), de las curvas que limitan una zona, determinada por los planos horizontales de cotas (10) y (11), distantes entre sí la cantidad suficiente para que en la superficie que

comprenden no existan grandes irregularidades. Imagínese una recta que vaya moviéndose de modo que, apoyándose en las dos curvas de la zona, sea siempre normal á una de ellas; esta recta, en sus diversas posiciones consecutivas, engendrará una superficie reglada, fácil de determinar, y que sustituirá aproximadamente á la de la zona. La superficie reglada anterior será desarrollable ó alabeada (*), según que la recta generatriz, cuyas posiciones están proyectadas en $a\,b$, $a'\,b'$, $a''\,b''$..... etc., sea normal á la vez á las dos curvas de la zona ó solamente á una de ellas, dando así lugar á dos casos diferentes, que vamos á considerar.

154. 1.er CASO.—**Zona desarrollable.**—Si la generatriz proyectada en $a\,b$ es normal á dos curvas en el espacio, será perpendicular á las tangentes proyectadas en $a\,a'$ y $b\,b'$, pero estas tangentes, por ser perpendiculares á una misma recta y estar en planos horizontales, serán perpendiculares al plano proyectante de la normal, y por tanto, paralelas en el espacio, así como sus proyecciones $a\,a'$ $b\,b'$, las cuales, además serán perpendiculares á la proyección $a\,b$ de la generatriz. Si suponemos á ésta, resbalando á lo largo de las tangentes, engendrará un plano; y si se considera su posición inmediatamente próxima, que es la proyectada en $a'\,b'$, se tendrá un elemento plano de la superficie geométrica, el cual puede suponerse confundido con la parte correspondiente de la superficie irregular de la zona.

Si á partir de la $a'\,b'$, hacemos consideraciones análogas, suponiendo á la generatriz pasando á la posición proyectada en $a''\,b''$, habiendo resbalado sobre las tangentes $a'\,a''$ y $b'\,b''$, se tendrá otro elemento plano distinto del primero y teniendo común con él, la posición de la generatriz proyectada en $a'\,b'$. Continuando de un modo análogo, se ve que la generatriz, al recorrer toda la zona, engendrará una superficie compuesta de elementos planos, tan pequeños como se quiera, y cuyo conjunto será una superficie

(*) Según la Geometría del espacio.

desarrollable, que se aproximará tanto más á la dada, cuanto menor altura tenga la zona.

155. 2.° CASO.—**Zona alabeada.**—Si las curvas de la zona son tales, que la generatriz es normal á una de ellas, pero no á la otra, como en la figura 114; las tangentes á las curvas en los extremos de la generatriz, no podrán ser paralelas, ni proyectarse las dos perpendicularmente á la proyección *a b* de la generatriz; la cual, en dos posiciones consecutivas, al resbalar sobre las tangentes proyectadas en *a a'* y *b b'*, no engendrará un elemento plano como en el caso anterior en que las tangentes estaban en un mismo plano por ser paralelas; pero sí un elemento alabeado. Considerando en este caso, las posiciones sucesivas de la generatriz, como cada dos consecutivas, determinarán un elemento alabeado, el conjunto de todos ellos, formará la superficie alabeada, que sustituirá aproximadamente á la irregular de la zona.

156. Las superficies geométricas desarrollables ó alabeadas, al sustituir aproximadamente á la verdadera de la zona, hacen que ésta quede determinada; pues como se verá á continuación, permiten resolver los dos problemas siguientes: 1.°, *dado un punto cualquiera de la superficie, determinar su cota*, y 2.°, *hallar en una zona las proyecciones de todos los puntos que tienen una cota dada.*

157, 1.° **Dado un punto en la superficie, hallar su cota.** Si el punto tiene su proyección en una de las curvas, su cota será la de ésta y el punto quedará determinado; tal es el *a* de la figura 113, cuya cota será (11). Si el punto no está en la curva, estará entre dos consecutivas, como el *m*; y en ese caso, se trazará por este punto una normal á la proyección de la curva de cota superior ó inferior inmediata; que aqui es la *a c*, y se prolongará hasta que corte á la otra curva. La generatriz *a'' m b''* de la superficie, que pasa por *m*, está acotada en (11) y (10), luego su escala de pendiente dará la cota de *m*, que será (10,9).

158. 2.° **Recíproca.**—*Hallar los puntos que tengan una cota dada.*—Sean éstos los de cota (10,9). Si en la zona (*a c b d*) de la

superficie, se trazan varias generatrices y en cada una de ellas se halla la cota (10,9), todos estos puntos satisfarán al problema; y su lugar geométrico será la curva que resulte de unirles por un trazo continuo; lo cual, en realidad, no viene á ser otra cosa que la sección de esta superficie por el plano de cota (10,9); y esta sección, la curva horizontal de dicha cota. Cuando se trata de hallar una curva intermedia entre dos de una zona, este es el procedimiento que se emplea; y se llama, *interporlar* una curva.

159. **Casos particulares.**—Hay casos en que la disposición de las curvas horizontales no permiten sustituir la superficie irregular por la de generación indicada anteriormente y hay que modificar ésta.

Sea, en efecto, una superficie cuyas curvas horizontales afecten la forma de la figura 115. Las dos curvas *a c c' a'* y *b d e' d' b'*, determinan una zona que tiene una parte *c m c' d' e' d* determinada con poca exactitud, pues por muy unidas que se tracen las generatrices, siempre, al llegar á la curva inferior, quedarán muy separadas; y los puntos de la superficie, en esta parte, no quedarán tan bien determinados como en el resto de la zona. Pero si en vez de haber trazado las horizontales de metro en metro, por ejemplo, se hubiesen trazado de medio en medio metro, en ese caso la zona hubiese sido representada con más exactitud; y ya que esto no es necesario, sino en la parte de *c m c' d' e' d*, se podrá interpolar en ella la curva de cota (9,5) y dividir la zona en dos zonas parciales, á las cuales se aplicará el método de generación indicado, resultando de este modo las dos series de generatrices *m n* y *n r*, entre las curvas de cota (10) y (9,5) y las de cota (9,5) y (9). Si la curvatura fuese tan pronunciada, que resultasen las curvas con una separación considerable, á pesar de la interpolación de una curva intermedia, se podría suponer en esta parte, la interpolación de dos, tres ó mayor número de curvas, según el caso; y la zona primitiva quedaría reducida á varias zonas parciales, como se ve en la figura 116.

160. **Caso en que las curvas son cóncavas.**—Las curvas presentan al observador unas veces su convexidad y otras su concavidad; y en este último caso, si ésta es muy pronunciada, al trazar las normales á la curva superior, se vendrán á cortar unas con otras, como se ve en *M* (fig. 117), antes de llegar á la curva siguiente; lo cual hace ver no es aplicable el sistema de generación indicado; pero como no hay razón para tomar la curva superior como directriz para trazar las normales, se toma la inferior (*M'*), en lo que no hay inconveniente; y la superficie que sustituye á la zona, podrá ser también desarrollable ó alabeada, y quedará determinada del mismo modo.

161. **Caso de inflexión.**—En superficies donde se presenten las zonas con partes convexas y cóncavas (fig. 118), se supondrá la generatriz, normal á la curva superior, en la parte convexa, y á la inferior en la cóncava; y para que al pasar de una generación á otra, no haya resalto brusco, se hará el cambio en el momento en que la normal á la curva superior lo sea también á la inferior; pues de este modo, esta posición de la generatriz, será la unión de las dos superficies. La figura indica este medio de generación. Hasta *m m'*, la generatriz ha sido normal á la *a a'*; en *m'*, lo es también á la *b b'*; y desde este punto, las posiciones siguientes *n n'*, *r r'*..... etc., son normales á la curva *b b'*.

Secciones planas de las superficies irregulares.

162. **Sección por un plano horizontal.**—Las superficies irregulares, estando representadas por las curvas horizontales, su intersección con un plano horizontal cualquiera será la curva de igual cota que la del plano, y se obtendrá por el método indicado

para interpolar una curva de cota dada, si es que no es una de las que sirven para representar la superficie.

163. **Idem por uno inclinado.**—Si el plano es inclinado, se emplearán planos horizontales auxiliares que corten á la superficie, según las curvas que las representan, y al plano, según sus horizontales.

Sea la superficie *S* y el plano $m_0\, n_{18}$ (fig. 119).

El plano horizontal de cota (18) corta á la *S*, según la curva (18), y al plano *m n*, según la horizontal *a a'* de la misma cota, obteniéndose los puntos *a a'* de la intersección buscada.

El plano de cota (16) da análogamente otros dos puntos *b b'*; y procediendo de la misma manera se obtendrá la intersección representada en la figura por las curvas rayadas *a b c d e f g h i j*, *a' b' c' d' e' f' g' h' i' j'*.

164. **Caso particular.**—Puede suceder que una horizontal del plano no corte á la curva de la misma cota en la superficie; en este caso (fig. 120) se trazan en la zona correspondiente varias generatrices y se hallan sus intersecciones con el plano *m n*. Así se han determinado los puntos *c, d, e, f,* los cuales, unidos á los *a* y *b*, dan una de las curvas de sección *a c d f b*. En la zona (8,6) también hay necesidad de determinar su sección por el plano, la cual se conseguirá por las generatrices de la zona, obteniéndose la curva *g.h.i.j.k l.r.*

165. **Otro procedimiento.**—También se podría haber recurrido al procedimiento de interpolar curvas intermedias en las zonas (6,8) y (8,10) y haber encontrado las horizontales de la misma cota del plano; pero este procedimiento es más largo, puesto que obliga á la interpolación de curvas.

166. **Sección por un plano vertical.**—Si el plano de la sección es vertical (fig. 121), se acotarán los puntos de la traza de este plano, en que es cortada por las curvas, y ésta será la intersección, como se ve en $m_{55}\, a_{50}\, b_{45}\, c_{40} \ldots\ldots n_0$. Las secciones causadas en las superficies por planos verticales se llaman *perfiles*.



Intersección de una recta con una superficie.

167. Este problema queda reducido á hacer pasar un plano cualquiera por la recta; pudiendo elegir como más sencillo, el proyectante de ésta, hallar la sección con la superficie, y los puntos en que se cortan la proyección de la recta y la de la curva de sección serán los buscados.

Intersección de superficies irregulares.

168. La intersección de dos superficies irregulares es muy fácil de determinar; pues viniendo ambas representadas por las curvas horizontales, no habrá sino hallar las intersecciones de las curvas de igual cota y unir estos puntos por un trazo continuo.

Si las curvas que representan las superficies no tienen las mismas cotas, habrá que interpolar en una de ellas las curvas de cota igual á las de la otra, quedando entonces reducido el problema al anterior. La figura 122 hace ver la intersección *a b c d e* y *a′ b′ c′ d′ e′* de las dos superficies representadas en la figura.

Apéndice á la 1.ª parte.

Aplicaciones principales del sistema de acotaciones.

169. Los *planos acotados* son de un uso continuo en la *fortificación*, en las *construcciones* y, en particular, en la *topografía;* y sin entrar en grandes detalles sobre todas sus aplicaciones, se indicarán aquellos problemas más elementales y de utilidad para poder usar de ellos al estudiar estas asignaturas; pero siendo la base de casi todos, el empleo de los perfiles, se empezará por las aplicaciones de éstos.

170. **Perfiles.**—Se ha dicho que toda sección causada por un plano vertical en una superficie poliédrica ó curva, se llama *perfil* (párrafo 166). Su determinación es la más sencilla de todas las secciones planas; por su abatimiento sobre el plano horizontal ú otro paralelo, se puede formar idea del relieve de la superficie, mucho mejor que por la proyección horizontal y las cotas; y, por último, por medio de los perfiles, se ha visto también que se determinan con gran facilidad las tangentes y rasantes á las superficies, en direcciones dadas; así como las intersecciones de éstas con rectas.

El único inconveniente que puede atribuírseles es, que siendo necesario, en general, efectuar su abatimiento, hay que trazar líneas auxiliares, las cuales hacen los dibujos confusos; y si para evitarlo se borraran después de utilizadas, se deteriorarían éstos. Se atenúa este defecto colocando papel transparente encima del plano y haciendo sobre él el trazado de las líneas auxiliares; desapareciendo así el único inconveniente que tenía este procedimiento, que en la actualidad está muy generalizado.

Problemas de aplicación á las superficies poliédricas. (1)

171. **Perfiles transversales y longitudinales en superficies prismáticas.**—La representación de las obras de *fortificación* y las de las *construcciones*, se facilita valiéndose de perfiles, y en muchos casos sustituyen con ventaja á la proyección horizontal ó á las cotas.

Las obras de esta clase, sobre todo las de fortificación de campaña, afectan, en general, formas prismáticas horizontales ó ligeramente inclinadas, y los perfiles pueden trazarse perpendicular ú oblicuamente á la dirección de las aristas laterales ó paralelamente á ellas; recibiendo, respectivamente, los nombres de *perfiles transversales, rectos ú oblicuos*, y de *perfiles longitudinales*.

172. **Problema.**—*Dada una superficie poliedral acotada, determinar los perfiles.*

Primer ejemplo. La determinación de un perfil está reducida á hallar la intersección de un plano vertical con una superficie prismática, problema ya resuelto.

En la figura 123 pueden verse los perfiles transversales $m\,n$ y $m'\,n'$, recto uno y oblicuo el otro, de una obra de fortificación formada por dos prismas cuya sección recta ó perfil es la $A\,B\,C\,D$ en uno, y la $E\,F\,G\,H$ en el otro, siendo todas sus aristas horizontales.

Estos prismas están terminados, el primero por planos $u_{0,5}\,v_0$ y $u'_0\,v'_{0,5}$ de pendientes $\frac{1}{1}$ (ó sea de 45°) y $\frac{1}{2}$ respectivamente. El segundo lo está á su vez por los planos $r_{0,5}\,s_{1,1}$ y $r'_{1,10}\,s'_0$ de las mismas pendientes, pero inclinaciones opuestas á los $u\,v$. $u'\,v'$.

---

(1) Para resolver en la clase, en la pizarra y delineados en pliegos, con datos variados.

173. *Segundo ejemplo.* En la figura 124 puede verse otra obra de fortificación determinada por la combinación de varios prismas horizontales. En *m n* está representado un perfil recto transversal, y en *m' n'* uno longitudinal, deducidos ambos por la intersección del plano vertical *m n* con los prismas *A B C D* y *D E F G H I*.

En *m' n'* hay otro perfil longitudinal, determinado del mismo modo, por la intersección con los prismas *A' B' C' D'*, *D' E' E'' D''* y *D'' C'' B'' A''*.

Los prismas cuyas secciones rectas son *A' B' C' D'* y *D'' C'' B'' A''*, están terminados por las intersecciones con los planos $r_{1,05}\ s_0$ y otro análogo, cuya pendiente es $\frac{1}{2}$.

174. **Problema inverso.**—*Dados los perfiles, determinar la proyección.*

Las figuras 123 y 124 hacen ver la facilidad de suprimir la proyección horizontal, si está sustituída por perfiles transversales y datos numéricos ó combinados con longitudinales.

En efecto, en la figura 123, basta conocer el perfil *m n*, la longitud de la arista *a* del prisma y la inclinación de los planos *r s*, *u v*, *r' s'* y *u' v'* para poder trazar toda la proyección; y en la figura 124, el perfil transversal *m n*, sirve para conocer los datos de los prismas *A B C D* y *D E F G H I*; y el longitudinal *m' n'* los de los *A' B' C' D'*, *D' E' E'' D''* y *D'' C'' B'' A''*; con lo cual, quedará determinada toda la proyección; puesto que se podrán encontrar las intersecciones de estos prismas, en las cuales quedarán limitados, y únicamente será necesario agregar el dato relativo á á los planos de terminación *r s*.

Problemas de aplicación á las superficies curvas.

175. **Perfiles en superficies curvas.**—Cuando las superficies irregulares, determinadas por las curvas horizontales, repre-

sentan el terreno, los perfiles permiten reconocer las inflexiones de éste en el sentido del relieve. En efecto, en la figura 121, el perfil *m n* indica, que desde la curva (0) á la (30), el terreno es cóncavo; y desde la (30) á la (55), convexo; existiendo, por consiguiente, una inflexión.

Pero si se analizan del mismo modo los perfiles *r s* y *r′ s′*, y además se tiene en cuenta la curvatura de las curvas horizontales, se verá que, en este sentido, de *r s* á *r′ s′*, el terreno es convexo ó en saliente; de *r′ s′* á *r″ s″*, cóncavo ó entrante, para volver á ser convexo ó saliente, de *r″ s″* á la derecha. Luego el perfil ha servido, por su abatimiento ($M A B ..... J n_0$), para hacer ver con más claridad la forma que afecta la superficie, cuya curvatura, en el sentido horizontal, era ya conocida por la disposición de las curvas.

176. **Forma de una superficie deducida de los perfiles y la inversa.**—Repitiendo estos perfiles, se podrá analizar un terreno en la parte que sea necesario, y deducir su forma horizontal y relieve.

En las superficies curvas, también pueden los perfiles, por sí solos, sustituir á la proyección acotada; y multiplicados convenientemente, permiten hallar dicha proyección; es decir, que resuelven el problema inverso.

En efecto (fig. 125, lám. 5.ª), sean *m n*, *m′ n′*, *m″ n″*, *m‴ n‴*, $m^{IV} n^{IV}$ una sucesión de perfiles de una superficie curva irregular. En cada uno de estos perfiles, se determinarán los puntos de cota redonda, y uniendo por un trazo continuo los de igual cota, quedarán trazadas, aproximadamente, las secciones horizontales, y, por tanto, la superficie acotada, tal como se ha enseñado á representarla.

177. En el perfil *m n*, por ejemplo, se han determinado los puntos de cota (4), (6), (8), entre los n_0 y a_{10}, conocidos por el perfil; así como los (12), (14), (16) y (18), entre el a_{10} y el m_{20} y, de un modo análogo, los de los otros perfiles. Se comprende

que las curvas, quedarán tanto mejor determinadas, cuanto más unidos estén los perfiles.

178. **Tangentes y rasantes á los perfiles.—Punto culminante y dominante.**—Las tangentes y rasantes, combinadas con las curvas de sección de los perfiles, ayudan también á la resolución de problemas de *desenfilada;* para lo cual, es necesario conocer lo que se entiende por punto *culminante* y punto *dominante* de un terreno, con relación á otro.

Punto *culminante* en un perfil, es el punto de mayor cota; y punto *dominante*, con relación á otro, es aquel en que se apoya la tangente ó rasante más alta que se puede trazar al perfil desde el punto dado.

179. Sea (fig. 126) *m n* el perfil de una superficie irregular y *p* el punto dado. Abatiendo el perfil con la sección en *M N* y el punto en *P*, se observa que desde *P* se pueden trazar las dos tangentes *P D* y *P M*, pudiendo esta última ser rasante. El punto *M*, más alto de la curva, es el *culminante*; y el *D*, punto de contacto de la tangente más alta ó más inclinada, es el punto *dominante* de esta curva con relación á *P*. Desde *M*, no se verá *P*, á pesar de ser el más alto; y en cambio, se verá desde *D*, que por ser el más alto de todos los que dominan á *P*, se le ha llamado *dominante*, y las $p_{11}\ d_{19}$ y $p_{11}\ m_{23}$ son la tangente y rasante, respectivamente.

180. **Regla.**—Se deduce de aquí que en un perfil, para hallar el punto *culminante* y *dominante*, con relación á otro dado, bastará determinar el punto de la curva que tiene mayor cota, el cual será el *culminante*, y trazar desde el dado la tangente ó rasante más alta á la curva del perfil, y el punto de esta recta que toque ó se apoye en ella, será el *dominante*. De aquí se deduce también que en un perfil, el punto culminante es invariable y el dominante varía con el punto dado, y que hay casos en que los dos puntos son uno solo, como en la figura 126, cuando el punto dado es el *Q*; siendo *M* el que reune las dos condiciones.

181. **Aplicaciones á la determinación de las partes**

visibles desde un punto.—Los puntos dominantes, pueden servir para determinar en los perfiles las partes de curva que son visibles é invisibles desde un punto dado en el mismo plano. En la figura anterior, desde *N* á *D*, la curva es visible desde *P*, y la *D M* invisible.

Si trazando las tangentes y rasantes desde el punto dado *P*, estas rectas lo son en puntos inferiores en cota, como los d_{20} e_{17} y f_{19}, de la figura 127, ninguno de ellos será dominante con relación al *P*; pero sí permitirán determinar la parte de curva visible é invisible desde él.

Con sólo observar la figura, se ve que las partes *D A*, *E B* y *F N* son invisibles desde *P*, y las *A E* y *B F* visibles.

Problemas de aplicación de rectas y superficies irregulares. (*)

182. 1.° *Dados dos puntos* a *y* b (fig. 128), *en la superficie irregular* S, *determinar sus cotas, la distancia que les separa, la pendiente de la recta que les une y los puntos de intersección de ésta con la superficie.*

Las cotas de *a* y *b* se determinan, como ya se sabe (párrafo 156), bien por las de las curvas, si están como en la figura, ó bien por medio de las generatrices correspondientes de la zona.

La distancia entre estos puntos, puede hallarse numéricamente (párrafo 72); ó por medio del plano proyectante *a b*, cuyo abatimiento da *A B*. La pendiente de esta recta también puede hallarse numéricamente ó midiendo el ángulo α en el abatimiento.

Para hallar los puntos de intersección con la superficie, se construye el perfil por *a b*, y el punto *M*, en que la *A B* corta á la curva abatida, es el abatimiento del punto buscado, que será el $m_{12,3}$.

(*) Para resolver en la pizarra, en clase y en planos que estén acotados.

La recta $A\,B$, puede encontrar á la curva, como en la figura, ser tangente, rasante ó pasar por encima. En la figura, de A á M, pasa por debajo de la curva, y de M á B, por encima.

183. 2.º *Por un punto dado* a_{18} *de una superficie* S, *trazar una recta que, apoyándose en una de las curvas horizontales, tenga una pendiente dada* tag $\alpha = \frac{1}{3}$.

Sea a_{18} el punto, y (2) la curva sobre la cual se ha de apoyar. La diferencia de cotas entre los puntos extremos es 18 — 2 = 16, luego el problema está reducido á trazar por a_{18} una recta de pendiente $\frac{1}{3}$, y elegir entre todas las que se pueden trazar la que se apoye en la curva (2). La pendiente $\frac{1}{3}$ es igual á

$$\frac{1 \times 16}{3 \times 16} = \frac{16}{42},$$

luego haciendo centro en a con un radio igual á (42) unidades, y describiendo un arco de círculo «cuya cota será 18 — 16 = 2», los puntos de intersección de esta circunferencia con la curva (2) darán las soluciones del problema, el cual tendrá tantas como puntos de intersección se hayan hallado, pudiendo también no tener ninguna. En la figura sólo hay el punto e, y la solución es la recta $a_{18}\,e_2$.

184. 3.º *Dada la recta* $a_{30}\,b_5$ (fig. 129) *sobre la superficie* S, *hallar un perfil* m n *de una anchura determinada y perpendicular á la dirección* a b; *y sustituir la curva resultante por una horizontal* $X_1\,Y_1$ *trazada por el punto* D_1 *de intersección de* a b *con el perfil.*

Se hallará el perfil $A\,B$ abatido; y en él, el punto D de intersección de $A\,B$ con el $m\,n$. El perfil por $m\,n$, abatido, será el $M_1\,N_1$, y el de d, será el D_1; por éste se tirará la horizontal $X_1\,Y_1$ para-

lela á *m n* y se verá que la curva $M_1 N_1$ tiene la parte $M_1 S_1$ por encima de $X_1 Y_1$ y la $S_1 N_1$ por debajo (*).

185. 4.° *Entre dos puntos* m_{14} *y* n_9 *de una superficie* S, *marcar una línea quebrada cuyos lados tengan todos la misma pendiente* $\frac{1}{5}$ (fig. 130).

Haciendo centro en *m* y con un radio igual á 5 unidades, se describirá una circunferencia, cuya cota será 14 — 1 = 13, y todas las rectas que partiendo de *m* se apoyen en ella, tendrán la inclinación pedida; se prolongarán estas rectas hasta encontrar la cota (12), ó mejor, se buscará esta cota en una de ellas, como en la *m r,* y con este radio se describirá una circunferencia, la cual cortará á la curva (12) en *a* y *a'*; y *m a* ó *m a'* serán lados de la línea buscada. En *a* y *a'* se repiten las operaciones, y así se irán encontrando sobre las curvas (11), (10), etc., puntos que, unidos con los anteriores, irán determinando líneas quebradas que satisfacen á la condición de estar sus lados inclinados $\frac{1}{5}$. Si al llegar á la curva inferior, una de estas líneas pasase por *n*, ésta será la solución, y no la habrá, si ninguna pasase por este punto; en cuyo caso será necesario escoger para solución aproximada aquella cuyo punto sobre la curva (9) caiga más próximo al punto *n*, como la *m a b d g* de la figura.

186. **Casos particulares.**—Si los arcos descritos con el radio anterior no cortasen en algún caso á la curva siguiente de cota inferior, indicará que en esta zona la superficie tiene una pendiente menor que la inclinación dada. En la figura sucede esto en *e'*, puesto que el radio *e' j''* no encuentra á la curva de cota (9), y, por lo tanto, no hay solución en esta parte, porque la pendiente de la superficie en ella es menor que la dada. Si el arco descrito es

(*) El perfil *a b* puede ser el perfil longitudinal de un camino en pendiente, y *m n* el transversal del mismo después de sustituir la $M_1 N_1$ por la $X_1 Y_1$.

tangente á la curva inferior, como en f''', en ese caso hay una solución en esa zona, que es la ff''', la cual tiene la misma pendiente que ella en esta parte (*).

187. 5.º *Desde un punto* p *de cota* (24) *de una superficie irregular, determinar la parte visible é invisible de esta superficie alrededor de este punto y en una longitud dada* (fig. 131).

Se trazarán perfiles en distintas direcciones pasando todos por *p* y por este punto, y en cada uno de ellos, se trazarán las tangentes ó rasantes que sea posible para que determinen, dentro de cada perfil, la parte visible é invisible. En el perfil *p m* (fig. 131), se hallan determinados los puntos *d.a.e.b.c*, según se ha indicado en el párrafo 155.

Repitiendo esta operación en todos los perfiles elegidos, se irán determinando puntos análogos á los hallados en el perfil *p m*, los cuales, unidos después ordenadamente por un trazo continuo, marcarán curvas límites de separación de la parte visible de la invisible.

En la figura 131, se ven las curvas $a\,a'\,a''$..... $e\,e'\,e''$..... $d\,d'\,d''$..... y $b\,b'\,b''$..... para los límites buscados; siendo invisible la parte de superficie comprendida entre las curvas $d\,d'\,d''$ y $a\,a'\,a''$, y entre las $e\,e'\,e''$ y $b\,b'\,b''$.

La inversa de este problema se resuelve del mismo modo, puesto que se pueden determinar los puntos de la superficie, desde los cuales se ve el punto dado.

188. 6.º *Por una recta horizontal* $m_7\,n_7$ (fig. 132), *trazar un plano que, apoyándose en la superficie* S, *la deje toda debajo.*

Si la superficie *S* está bien representada, las curvas horizontales estarán lo suficientemente aproximadas entre sí para poder suponer que el plano pedido se ha de apoyar sobre una de las curvas, pues de lo contrario, se podrían interpolar curvas nue-

(*) Este problema es muy usado en el trazado de caminos por la ladera ó falda de una altura, por la cual no se puede bajar sino en zig-zag.

vas entre cada dos, y siempre se vendría á parar al caso indicado.

189. 1.º **Recta de cota inferior á la de las curvas.**—Imagínese un plano que, pasando por $m_7\,n_7$, vaya apoyándose sucesivamente en las curvas de cota superior, pero dejándolas debajo de sí ó siéndolas rasante.

La posición del plano que rasa á la curva de cota (35), se hallará trazando la tangente ó rasante *a* paralela á $m_7\,n_7$; y estas dos horizontales determinarán la escala de pendiente del plano (35.7). Repitiendo la operación para las curvas de cota (30); (25), etcétera, se encontrarán las posiciones sucesivas de este plano (30.7), (25.7), (20.7)..... etc.; y eligiendo entre todas ellas la de mayor pendiente, ó sea la que forma mayor ángulo con el de comparación, ésta será la que satisface al problema, puesto que determina el plano que pasa por *m n* y se apoya en la superficie dejándola toda debajo. La comparación de las escalas de los diversos planos para una misma diferencia de cotas, por ejemplo, (5), hace ver la que forma mayor ángulo y, por lo tanto, la de mayor pendiente, que, en el caso actual, es la $C_{25}\,m_7$.

190. 2.º **Recta de cota superior.**—Si la recta *m n* tuviese la posición $m'_{36}\,n'_{36}$; es decir, estuviese en las curvas de cota mayor, las posiciones de los planos rasantes se determinarían buscando las rasantes á las curvas de cota inferior y paralelas á *m′ n′*, y entonces el plano que satisfará al problema será el que, entre todos los trazados, forme el menor ángulo con el de comparación; ó sea el que tenga menor pendiente.

191. **Otro medio de hallar el plano rasante.**—Puede evitarse el hallar las escalas de pendiente de los planos rasantes, empleando un perfil y encontrado sobre él las trazas de las diversas posiciones de estos planos.

En efecto; en la figura anterior, si se traza el perfil *x y* perpendicular á la recta *m n*, los abatimientos de las trazas de los planos rasantes, que pasan por *m n*, serán $M_7\,F_{10}$, $M_7\,E_{15}$, $M_7\,D_{20}$.....,

etcétera, y entre ellos el que forme mayor ángulo con $x\,y$, será el correspondiente á la posición del plano pedido. En la figura, es el $M_7\,C_{25}$.

El problema no tiene solución si, como en la figura 133, no se pueden trazar á las curvas, rasantes paralelas á $m_{14}\,n_{14}$.

192. **Caso en que la recta es inclinada.**—Si la recta dada $m_{35}\,n_5$, en vez de ser horizontal fuera inclinada (fig. 134), en este caso se resolverá el problema de un modo análogo.

Por la recta dada $m_{35}\,n_5$ se trazan las posiciones de los planos que rasen á cada una de las curvas, y entre ellas se busca la que deje debajo á las demás.

Para esto, por la recta $m\,n$ y por los puntos de igual cota que las curvas, se trazan las rasantes $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$, etc., y cada una de éstas, con la recta $m\,n$, determinan una posición del plano.

Para elegir de entre ellas cuál es la que deja debajo á las demás, no habrá sino buscar las escalas de pendiente $r\,s$, $r'\,s'$, $r''\,s''$, de los planos que determinan y ver el de mayor pendiente, siendo en la figura el $r''_5\,s''_{10}$.

193. Otro medio hay para conocer con facilidad la posición del plano rasante que deja debajo de sí toda la superficie, y consiste en ver cuál de las tangentes ó rasantes $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$...., forma el menor ángulo con la parte ascendente de la recta dada $m\,n$.

En efecto, el plano está determinado en cada posición por la recta dada y la horizontal correspondiente, que no es sino la rasante; luego si por el punto n_5, por ejemplo, se trazan rectas paralelas á estas horizontales; bajando desde otro punto de la $m\,n$, tal como el b'_{10}, las perpendiculares $b'\,k$, $b'\,k'$, $b'\,k''$, etc., éstas serán las líneas de m. p. de los planos; y la más corta pertenecerá al plano de mayor pendiente; pero como estas perpendiculares van siendo menores á medida que las horizontales van formando menor ángulo con la parte ascendente de las cotas de $m\,n$, queda demostrado lo que se quería. En la figura, el ángulo α'' es el

menor, luego la $c\,c'$ que le forma con la $m\,n$, determinan el plano $r''\,s''$, que resuelve el problema.

En la práctica se trazan, desde los puntos de la recta, las tangentes ó rasantes á las curvas de igual cota y se busca entre éstas la que forma menor ángulo con la proyección $m\,n$; y ésta es la que determinará el plano rasante pedido.

FIN DE LA PRIMERA PARTE

ÍNDICE

SISTEMA DE ACOTACIONES
(1.ª PARTE)

INTRODUCCIÓN

I

Sistema de representación.

Del punto.

De la recta.

Del plano.

II

Rectas y planos.

Posiciones de rectas y planos.

Problemas.

Cambios, giros y abatimientos.

Problemas de aplicación.

Ángulos de rectas y planos.

Problemas de ángulos de rectas y planos.

III

Líneas curvas y superficies.

Sistema de Acotaciones.

(2.ª parte.)

Planos tangentes y rasantes á las superficies.

Planos tangentes en general.

194. **Generalidades.**—Conocidos por la Geometría descriptiva los métodos para trazar planos tangentes á las superficies geométricas, fácil es adaptarles al caso de hallarse éstas representadas por el Sistema de las Acotaciones; pero como muchas de las superficies allí estudiadas no tienen aplicación ninguna práctica en este sistema de representación, el estudio de los planos tangentes se limitará al de las superficies cónicas y cilíndricas, como preliminar, y después, al de las superficies irregulares.

195. **Plano tangente.**—Los planos tangentes han de contener, en general, las tangentes á todas las curvas que se puedan trazar á la superficie por el punto de contacto, por lo cual, bastará para determinarles, el conocimiento de un punto y de una de las tangentes, ó el de dos tangentes.

196. **Casos diversos.**—Los casos que se presentan en la determinación de planos tangentes pueden reducirse á los que siguen:

1.º Planos tangentes á una superficie en uno de sus puntos.
2.º Planos tangentes á una superficie por un punto fuera.
3.º Planos tangentes á una superficie paralelos á una recta.
4.º Planos tangentes á una superficie pasando por una recta.
5.º Planos tangentes á una superficie paralelos á un plano.
6.º Planos tangentes á varias superficies.

Estos casos pueden aplicarse á las superficies geométricas ó á las irregulares.

Planos tangentes á superficies geométricas.

1.° Conos y cilindros.

197. **Planos tangentes por un punto de la superficie.** CONO.--Sea el cono $v_9\ a_8\ b_3\ c_3\ d_3$ (fig. 135), y p_4 el punto de tangencia.

El plano tangente lo será á lo largo de la generatriz $v\ p$, contendrá á esta recta y á todas las tangentes á la superficie en los diversos puntos de aquélla; y, por lo tanto, á la $a\ n$ trazada en el punto a_8 en que encuentra á la traza del cono; pero como esta tangente es horizontal, será una horizontal del plano que se busca $m_9\ n_7$, el cual queda determinado por ella y la generatriz $v\ p$, ó por ella y el vértice v.

Si el punto p fuese de la superficie cónica, pero no se conociese su cota, pertenecería á dos generatrices $v\ p\ a$ y $v\ p\ c$. Sus cotas serían 4 y 6,3, respectivamente, y el problema tendría las dos soluciones $m_9\ n_3$ y $r_3\ s_9$.

198. CILINDRO.—Sea el cilindro dado por su generatriz $b\ b'$ (figura 136) y por su traza $a_4\ b_4\ c\ d$, y p el punto de tangencia.

La tangente $a\ n$, á la traza del cilindro, en el extremo de la generatriz $p\ a$, es una horizontal del plano tangente, el cual será el $m_8\ n_4$.

Si el punto estuviese dado tan sólo por su proyección p, pertenecería á dos generatrices. Sus cotas serían 8 y 6,3, y el problema tendría las dos soluciones $m\ n_4$ y $r_{6,3}\ s$.

199. **Planos tangentes por un punto fuera.**—CONO.— Sea el cono $v_{12}\ a_6\ b_6\ c_6\ d_3$ (fig. 137) y p_{10} el punto dado.

Uniendo el vértice con el punto p y hallando la traza t_6 de esta recta sobre el plano de la base del cono, y tirando por ella las tangentes $t\ n$ y $t\ r$, éstas serán horizontales de los planos tangentes $m_{10}\ n_6$ y $r_6\ s_{10}$.

200. CILINDRO.—Los datos son (fig. 138), $a_2\ a'_7$ y $a_2\ b_2\ c_2\ d_2$, y el punto p_5.

Trazando por p una paralela á las generatrices y hallando su traza t sobre el plano de la base, se trazarán desde t las tangentes

á ésta $t\,n$ y $t\,s$, las cuales, con las generatrices correspondientes, darán los planos $m_5\,n_2$ y $r_5\,s_2$, soluciones del problema.

201. **Planos tangentes paralelos á una recta.**—CONO.—Sea la recta dada $p_8\,q_4$ (fig. 139).

Por el vértice v_6 se trazará la $v\,t$ paralela á la recta $p\,q$, se hallará su traza t_2 sobre el plano de la base, y desde ella se trazarán las tangentes $t\,a$ y $t\,c$; las cuales, con la $v\,t$, determinan los dos planos tangentes $m_6\,n_2$ y $r_2\,s_6$.

202. CILINDRO.—La recta dada es la $p_6\,q_2$ (fig. 140).

Por un punto cualquiera p, de la recta, se trazará la $p\,t$ paralela á las generatrices, y estas dos rectas determinarán un plano paralelo al que se busca, y cuya traza será paralela á las horizontales de aquél, como la 4-4; luego trazando tangentes á la base del cilindro que sean paralelas á estas horizontales, éstas, en unión de las generatrices de contacto, determinarán los planos tangentes $m_6\,n_4$ y $r_6\,s_4$, soluciones del problema.

203. **Planos tangentes pasando por una recta.**—CONO. Este problema, en general, no tendrá solución, puesto que el vértice y la recta dada determinan por sí solos un plano, el cual podrá ser ó no tangente al cono.

Para ver si lo es, se hallará la horizontal de este plano cuya cota sea igual á la de la base; y si fuese tangente á esta base, el plano lo sería al cono, y en caso contrario, no habría solución.

204. CASOS PARTICULARES. 1.° Si la recta pasase por el vértice, se hallaría la traza sobre el plano de la base y desde ella se trazarían las tangentes á éstas, las cuales, con la recta dada, determinarían los planos tangentes.

205. 2.° Si la recta, además de pasar por el vértice, se confundiese con una generatriz, el problema tendría una sola solución.

206. 3.° Si la recta dada pasase por el vértice y por el interior del cono, su traza caería dentro de la base de aquél y no podrían trazarse tangentes, por lo cual no habría solución.

207. CILINDRO.—La figura 140 hace ver que el problema ten-

drá solución, solamente en el caso en que, al trazar por un punto de la recta una paralela á las generatrices del cilindro, la traza 4-4 del plano que determinan la recta dada y la paralela, sea tangente á la base del cilindro.

208. CASOS PARTICULARES. 1.° Si la recta dada fuese paralela á las generatrices del cilindro, se hallaría su traza sobre el plano de la base, se trazarían desde ella las tangentes que fuese posible, y éstas, con la recta dada, darían otras tantas soluciones.

209. 2.° Si la recta dada se confundiese con una de las generatrices, el problema tendría una solución; y si fuese interior al cilindro, no habría ninguna.

210. **Planos tangentes paralelos á un plano.**—CONO.—Por el vértice se trazará un plano paralelo al dado, se hallará su traza sobre el plano de la base del cono y si resulta tangente á ésta, el problema tendrá solución; no habiéndola en caso contrario.

211. CILINDRO.—El plano tangente, además de ser paralelo al dado, ha de contener á la generatriz de contacto. Sus horizontales habrán de ser paralelas á las del plano dado; y la de cota igual á la de la base, habrá de ser tangente á ésta.

Se trazarán las rectas $e_4\, x_4$ y $f_4\, u_4$ (fig. 140), tangentes á la base y paralelas á la $q_6\, f'_6$, horizontal del plano dado $p_4\, q_6$. Por las generatrices $e\, e'$ y $f\, f'$, y por las tangentes trazadas, se harán pasar los planos respectivos $z_6\, x_4$ y $v_6\, u_4$; y si resultan paralelos al dado $p_4\, q_6$, el problema tendrá solución; no habiéndola en caso contrario, como se ve en la figura, sin más que observar las escalas de pendiente del plano $p_4\, q_6$ y de los $z_6\, x_4$ y $v_6\, u_4$, que tienen sus escalas en sentido inverso

2.° Superficies cónicas y cilíndricas en general.

212. **Superficie cónica cualquiera.**—Los problemas anteriores se han referido únicamente á conos y á cilindros de formas regulares; pero en el caso de tratarse de superficies cónicas ó cilíndricas de formas irregulares y variadas, como sucede en la práctica,

se reducirán fácilmente á los casos anteriores; para lo cual, se substituirá la curva directriz de doble curvatura, por una curva plana, que se obtendrá cortando á la superficie por un plano horizontal de cota dada. De este modo, la superficie cónica ó cilíndrica quedará representada por los mismos datos que en los casos anteriores, y la serán aplicables los mismos métodos de resolución; pero antes de esto se indicará un medio rápido de hallar la sección plana de una superficie cónica ó cilíndrica.

213. **Sección de una superficie cónica por un plano horizontal.**—Método abreviado.—En el párrafo 148 se ha indicado el método general para hallar la sección plana de una superficie cónica; pero en la práctica, y tratándose de un plano horizontal, hay un procedimiento mucho más rápido, el cual es casi el único que se emplea.

Sea $v_1\ a_9\ b_{10}\ c_9\ d_8\ e_9\ f_{10}\ g_9\ h_8\ i_{7,5}$ (fig. 141) la superficie cónica, en la que su directriz es una curva de doble curvatura con varias inflexiones; y sea 7 la cota del plano horizontal cuya sección se ha de hallar.

Para proceder con rapidez, se trazará por el vértice una recta arbitraria $v_4\ z$, en la cual se marcarán las cotas que tenga la curva directriz, así como la 7 del plano horizontal de la sección. Se colocará una escuadra de modo que su borde pase por el punto a_9 de la primera generatriz y por el de igual cota de la recta auxiliar $v\ z$, y corriendo la escuadra paralelamente á esta dirección hasta que pase por la cota 7 de la $v\ z$, se marcará en la generatriz $v\ a$ el punto a' de cota 7, que será el de intersección del plano horizontal de esta cota con la generatriz.

La operación se repetirá para todos cuantos puntos se crea necesario de la curva directriz, y sobre las generatrices correspondientes se irán marcando los puntos de cota 7 en que el plano horizontal dado las va encontrando. Todos estos puntos, unidos por un trazo continuo, determinarán la curva de la sección buscada $a'_1\ b'\ c'\ d'\ e'\ f\ g'\ h'\ i'_7$.

214. **Superficie cilíndrica cualquiera.**—De un modo análogo al anterior, se halla con rapidez la sección por un plano horizontal en una superficie cilíndrica. La figura 142 hace ver la superficie dada por su generatriz $d_6\ k_{14}$ y por su directriz $a_9\ b_7\ c_6\ d_6\ e_7\ f_8\ g_9\ h_{10}\ i_8\ j_7$.

Se han hallado las cotas de una de las generatrices $d\ k$ y éstas han substituído á las de la recta auxiliar $v\ z$ del caso de la superficie cónica, obteniéndose la curva sección $a'_{11}\ b'\ c'\ d'\ e'\ f'\ g'\ h'\ i'\ j'_{11}$ por el plano horizontal de cota 11. También puede trazarse una recta arbitraria en vez de la $d\ k$ y proceder del mismo modo.

215. Casos particulares.—*Cónicas.*—En las aplicaciones, las superficies cónicas y cilíndricas pueden resultar con formas tan variadas y curvaturas tan irregulares, que sus secciones por planos horizontales den lugar á curvar que presenten también grandes variedades, y aunque todos los casos entran de lleno en los ya estudiados, conviene conocer algunos por ser de interés para las aplicaciones.

216. *1.er caso.*—**La cota del vértice es inferior á las de la curva directriz.**—Sea $V_7\ A_{11,4}\ B_{12,5}\ C_{10,5}$ la superficie, y $P_{10}\ Q_{10}$ el plano (figura 143) (1).

Siempre que la cota del plano sea mayor que la del vértice, la sección será una curva como la $a_{10}\ b_{10}\ c_{10}$, que podrá presentar curvaturas más ó menos pronunciadas é irregulares, pero todos sus puntos pertenecerán á las generatrices de la superficie, sin que haya habido necesidad de prolongarlas del otro lado del vértice.

Si, por el contrario, la cota del vértice fuese superior á la del plano, como en el caso de ser éste el $R_5\ S_5$, para hallar la sección $a'\ b'_5\ c'_5$, sería necesario prolongar todas las generatrices más allá del vértice, formando la hoja opuesta á la dada $V\ A\ B\ C$.

(1) Esta figura y las dos siguientes están en perspectiva para mayor claridad.

217. *2.º caso.*—**La cota del vértice es superior á las de la curva directriz.**—Sea $V_8\ A_8\ B_{17}\ C_2$ la superficie, y $R_5\ S_5$ el plano (figura 144).

Siempre que la cota del plano sea menor que la del vértice, la sección será una curva $a_5\ b_5\ c_5$ obtenida en la hoja dada sin tener que prolongar las generatrices del otro lado del vértice.

Si, por el contrario, la cota del plano es superior, como la del $P_{10}\ Q_{10}$, la sección $a'_{10}\ b'_{10}\ c'_{10}$ se hallará teniendo que prolongar las generatrices en la hoja opuesta á la dada.

218. *3.er caso.*—**La cota del vértice es intermedia entre las diversas de la curva directriz.**—Sea $V_8\ A_{15}\ B_{14}\ C_{14}\ D_{12}\ E_{11}\ X_8\ F_5\ G_5\ H_2\ I_5\ J_{11}\ K_{14}$ la superficie, y $P_{11}\ Q_{11}$ el plano (fig. 145).

Cualquiera que sea la cota que se elija para el plano de la sección, ya sea mayor ó menor que la del vértice, el plano cortará directamente en la hoja dada á todas las generatrices que vayan á parar á puntos de la curva directriz de cota mayor que la del vértice; pero, en cambio, á todas las que terminen en puntos de cota inferior, las cortará en sus prolongaciones del otro lado del vértice, ó sea en la otra parte de hoja opuesta á la dada; pero habrá generatrices como las $V_8\ X_8$ y $V_8\ Z_8$, que siendo paralelas al plano $P_{11}\ Q_{11}$ no le encontrarán, y la sección plana tendrá puntos en el ∞ correspondientes á estas generatrices.

La figura hace ver la curva $a_{11}\ b_{11}\ c_{11}\ d_{11}\ e_{11}\ j_{11}$ de sección correspondiente á la parte de hoja dada; la $f'_{11}\ g'_{11}\ h'_{11}\ i'_{11}$ de la parte de hoja que ha sido necesario prolongar, y las rectas $x\ v\ x$ y $z\ v\ z$ paralelas á las $X_8\ V_8\ X_8$ y $Z_8\ V_8\ Z_8$, las cuales vendrán á ser como asíntotas de las curvas de sección, hacia las cuales tenderán los puntos de la sección, correspondientes á las generatrices que terminan en puntos de la directriz de cotas menores que la 11 del plano $P\ Q$ y mayores que la 8 de las horizontales $V_8\ X_8$ y $V_8\ Z_8$, que son las que separan las generatrices que producen las curvas de sección en la hoja dada y en la prolongada.

219. OBSERVACIÓN.—En las aplicaciones es necesario tener gran

cuidado en el examen de las curvas de sección para no confundir las pertenecientes á las de la hoja dada con las de las hojas prolongadas; siendo conveniente también el trazado de las rectas *x v x* y *z v z*, porque sirven de guía para el trazado de las curvas de sección, puesto que hacen el oficio de asíntotas.

220. **Planos tangentes á superficies cónicas cualesquiera.**—Con los preliminares indicados es fácil ya pasar á la aplicación al caso general de las superficies cónicas.

Si no se marca el punto de tangencia del plano, el problema tendrá, en general, infinidad de soluciones.

En efecto, imaginando una recta que vaya moviéndose á lo largo de la curva *a′ b′ c′..... i′* (fig. 141) y conservándose siempre tangente á ella, cada una de sus posiciones, en unión del vértice, determinarán un plano tangente á la superficie.

Entre todas estas soluciones hay, sin embargo, planos que presentan particularidades con relación á la superficie y algunas que conviene conocer, y que en muchos casos pueden limitar el número de soluciones.

221. EJEMPLOS. 1.º *Plano tangente en un punto* p *de la superficie.*

La tangente *c′ m* y el vértice *v*, darán el plano m_7 n_4 como única solución.

222. 2.º *Plano tangente que no corte á la superficie.*

Las tangentes á la curva sección, que no la corten, serán las que marcarán las soluciones.

En la figura, todas las tangentes á la curva en puntos, á la derecha del c'_7 y todas la de la parte *k l*, resuelven el problema en unión con el vértice.

Análogamente, las tangentes que se tracen por delante de la curva sección entre los puntos *r* y *s* obtenidos trazando las dos tangentes *a′ r*, *i′ s*, darán también soluciones.

223. 3.º *Planos tangentes en puntos de cota dada de la curva directriz.*

Sea 9 la cota dada.

El problema en esta figura tendrá cuatro soluciones, determinadas por las generatrices $v\,a$, $v\,c$, $v\,e$ y $v\,g$, y por las tangentes á la curva de doble curvatura en los puntos a_9, c_9, e_9 y g_9, únicos de esta cota.

En el párrafo 125 se indica el medio de trazar una tangente á una curva de doble curvatura, el cual podría aquí aplicarse, pero es mucho más sencillo y más exacto trazar las tangentes á la curva sección en los puntos a' , c'_7, e'_7 y g'_7; y éstas, en unión con el vértice, determinarán los planos tangentes pedidos, tales como el $m_4\,n_4$.

224. 4.° *Planos tangentes á la superficie y que formen con el horizontal de proyección un ángulo cuya tag* $\frac{m}{n}$.

En los párrafos 98 y 99 se ha visto el medio de trazar por un punto todas las rectas que formen con el horizontal un ángulo dado. La misma construcción puede hacerse aquí omando por punto el vértice v_4.

Con un radio $v\,u$ igual al denominador de la tangente, ó sea á n unidades, se describirá una circunferencia, á la cual se la pondrá la cota que resulta de aumentar á la del vértice el numerador m de la tangente.

El vértice y esta circunferencia determinan un cono cuyas generatrices forman con el horizontal el ángulo dado; por consiguiente, el plano que á la vez sea tangente á este cono auxiliar y á la superficie cónica dada, resolverá el problema.

En la figura el ángulo dado es tag $\frac{2}{5}$.

Para trazar este plano tangente común á las dos superficies se buscará la sección del cono $v_4\,u_6$ con el plano de cota 7, á fin de tener las dos secciones $a'_7\,b'\,c'$..... i'_7 y la $x\,x_7$ en el plano horizontal de esta cota.

La figura hace ver la imposibilidad de trazar una tangente común á las dos curvas y, por consiguiente, la carencia de solu-

ción en este caso. En cambio, en la figura 146 (1), representada la superficie por su vértice v_7 y por la sección plana $a' \, b' \, c' \, d'$ por el horizontal de cota 27, hay dos soluciones.

En efecto; construyendo el cono $v_7 \, u_9$, cuyas generatrices formen con el horizontal el ángulo cuya tag $\frac{2}{5}$, y buscando después su sección $x_{27} \, x_9$ por el plano de cota 27, se ve que las dos curvas de sección tienen un punto de contacto en t, y que admiten además otra tangente común $b'_{27} \, t'_9$; y, por consiguiente, los planos $m_{27} \, n_7$ y $r_{27} \, s_7$ serán las soluciones de este caso.

La variedad de los datos hará que este problema unas veces tenga varias soluciones y otras no tenga ninguna.

225. 5.º *Plano tangente superior ó inferior á la superficie.*

Se entiende por plano tangente superior ó inferior, el que siendo tangente, deja debajo ó encima de él á toda la superficie.

Las tangentes á la curva sección, que no la corten, serán, en unión del vértice, los elementos para determinar los planos tangentes superiores ó inferiores.

Para saber á cuál de las dos clases pertenece cada plano, hay que observar atentamente la posición que ocupa la tangente respecto á la curva sección y al vértice; pudiendo presentarse casos distintos, según que las curvas de sección provengan de la sección en las generatrices de la hoja cónica dada ó de las prolongaciones de ésta en la otra hoja (216 á 219). Estos casos se reducen á los siguientes:

226. *1.er caso.*—**El vértice de la superficie tiene cota menor que la del plano de sección.**—En la figura 143 se ve que las tangentes $t \, t$ á la curva sección $a_{10} \, b_{10} \, c_{10}$ que pertenezcan á planos tangentes que dejen debajo á la superficie cónica dada $V_7 \, A \, B \, C$, tienen que dejar á distinto lado al vértice y á la curva, por ser ésta de sección en la hoja dada.

(1) Se ha suprimido toda la parte de la curva directriz de doble curvatura, así como la prolongación de las generatrices más allá de la sección horizontal de cota 27, para evitar confusiones en la figura.



En cambio en la figura 144, en que la curva de sección $a'_{10}\, b'_{10}\, c'_{10}$ proviene de tener que prolongar la hoja dada $V_8\, A_3\, B_{1,7}\, C_2$; las tangentes $t'\ t'$ que determinan el plano tangente superior dejarán al vértice y á la curva al mismo lado.

227. *2.º caso.*—**El vértice de la superficie tiene cota mayor que la del plano de sección.**—La misma figura 144 hace ver la sección por el plano $R_5\, S_5$, en la hoja dada $V_8\, A\, B\, C$, y las tangentes $t\ t$ correspondientes al plano superior serán las que dejan al vértice y á la curva $a_5\, b_5\, c_5$ del mismo lado.

En la figura 143 se ve lo contrario por hallarse la curva de sección $a'_5\, b'_5\, c'_5$ en la hoja prolongada de la superficie dada $V_7\, A\, B\, C$.

228. *3.er caso.*—**Plano tangente inferior.**—Se presentan otros dos casos análogos á los anteriores y en ambos pasa todo lo contrario con la posición de la tangente respecto al vértice y á la curva de sección, según que provenga ésta de sección en la hoja dada ó en la prolongada.

229. Regla.—Puede deducirse de lo anterior, una regla muy sencilla y fácil de aplicar en cada caso, la cual evita las equivocaciones á que puede dar lugar la determinación del plano tangente superior ó inferior.

230. 1.º **Plano tangente superior.**—*Examínense las curvas de sección por el plano horizontal para ver si pertenecen á secciones en la hoja cónica dada ó si ha habido necesidad de prolongar ésta ó alguna parte de ella para hallar la sección, y examínese también si la cota del vértice es inferior ó superior á la del plano de sección; y hecho esto, búsquese en uno de los cuatro casos siguientes:*

1.º La cota del vértice es inferior á la del plano, y la sección es en la hoja dada. 2.º La cota del vértice es superior y la sección es en la prolongación de la hoja.	La tangente deja á distinto lado al vértice y á la curva.

3.° La cota del vértice es superior y la sección es en la hoja dada.

4.° La cota del vértice es inferior y la sección es en la prolongación de la hoja.

} La tangente deja al mismo lado al vértice y á la curva.

231. Aplicación.—Sea el caso de la figura 145 en que hay la curva de sección $a\,b\,c\,d\,e$ de la hoja dada y la $f'\,g'\,h'\,i'$ de hoja prolongada Para que haya solución de plano tangente superior se necesita que las tangentes $t\,l$ y $t'\,t'$ que determinen los planos tangentes superiores, dejen á la curva $a_{11}\,b_{11}\,c_{11}\,d_{11}\,e_{11}$ y al vértice v_8 á distinto lado, y á éste y á la curva de hoja prolongada $f'_{11}\,g'_{11}\,h'_{11}\,i'_{11}$ al mismo lado. Si en la figura, la última generatriz por debajo del vértice, en vez de ser la $V_5\,G_5$ fuese, por ejemplo, la $V_8\,N_4$, la curva de la hoja prolongada pasaría por n'_{11} y las curvas de sección quedarían, como se ve en la figura 147, $j\,a\,b\,c\,d\,e$ y $f'\,k'\,l'\,n'\,p'\,h'\,i'$, y la tangente del plano superior sería la $t\,t$, que satisface á la regla para las dos curvas. Si en la misma figura 145 la última generatriz fuese la $V_8\,M_5$, la curva de la hoja prolongada pasaría por m'_{11}, y las curvas de sección $j\,a\,b\,c\,d\,e$ y $f'\,k'\,l'\,m'\,p'\,h'\,i'$ quedarían como en la figura 147, en la cual se ve la imposibilidad de trazar una tangente que no corte á alguna de las curvas, y por consiguiente, la falta de solución en el problema.

La figura en perspectiva 145 hace ver, desde luego, esta imposibilidad, puesto que el plano que fuese tangente superior para la parte de hoja que da la sección $j\,a\,b\,c\,d\,e$, cortaría á la otra parte que hay por debajo del plano; é inversamente, el plano que fuese tangente, por ejemplo, á la parte inferior en la generatriz $V_8\,M_5$, tendría que cortar á la parte superior de la superficie cónica y no habría solución.

En la figura 141 las tangentes en los puntos de la curva comprendidos entre s y r darán planos tangentes superiores como $p_7\,q_4$. El $m_{27}\,n_7$ de la figura 146, también es otra solución.

232. 2.° **Plano tangente inferior.**—Las mismas consideraciones conducen á una regla en que se verifica todo lo contrario que en la anterior respecto á las tangentes que sirven para determinar los planos tangentes inferiores, pero este caso ocurre muy rara vez en la práctica.

En la figura 141 el plano m_7 n_4 es el tangente inferior, y en la 146 lo es el plano r_{27} s_7 .

233. Casos particulares.—*1.er caso.*—Cuando el problema tiene un gran número de soluciones, si se quiere averiguar cuál es entre todas ellas la que da el plano tangente superior y que forma el mayor ángulo con el horizontal, no habrá necesidad de hallar sus escalas de pendiente, pues bastará observar en la figura cuál es entre todas las tangentes que satisfagan á la condición de ser horizontales de los planos tangentes buscados, la que pasa más cerca del vértice, y ésta será la que dará la solución.

En efecto, en la figura 141 se ve que todas las tangentes que pueden trazarse entre los puntos *s* y *r* de la curva serán las horizontales de cota 7 de los planos tangentes, y las escalas de pendientes de éstos serán paralelas á las perpendiculares bajadas sobre ellas desde el vértice, y, por lo tanto, la tangente que pase más cerca del vértice será á la que corresponderá menor perpendicular y mayor pendiente para el plano.

234. *2.° caso.*—Lo contrario sucedería si se pretendiese hallar entre todas las soluciones de plano tangente inferior aquel cuyo ángulo con el horizontal fuese el menor.

Planos tangentes y rasantes á superficies irregulares.

Plano tangente por un punto de la superficie.

235. Las superficies irregulares, viniendo dadas por las curvas horizontales que las dividen en zonas, pueden dar lugar á dos casos: uno, en que el punto dado esté en una curva; y otro, en que se halle entre dos sobre la superficie de una zona.

236. *1.er caso.—El punto* p *se halla en la curva de cota* 9 (figura 148).

Por p pasan dos generatrices, una $p\ a$ de la zona inferior, y otra $p\ b$ de la superior, las cuales, en unión de la tangente $m\ p\ s$, determinarán los dos planos $m_9\,n_8$ y $r_{10}\,s_9$, que serán tangentes en p; uno en la zona 9-8 y otro en la 10-9, siempre que la zona sea desarrollable.

Si las distancias $p\ a$ y $p\ b$ fuesen iguales, los dos planos se confundirían en uno solo, y el problema no tendría sino una solución. Pero si $p\ a$ no fuese igual á $p\ b$ habrá dos soluciones, pudiendo elergirse cualquiera de ellas.

En la práctica aún puede considerarse este caso como teniendo una infinidad de soluciones aproximadas.

En efecto, si se supone que al plano tangente $m_9\,n_8$ se le hace girar alrededor de la tangente mps, hasta confundirse con el $r_{10}\,s_9$, y que durante su movimiento vaya tomando todas las inclinaciones posibles; en cada una de estas posiciones podrá ser considerado como una solución bastante aproximada á la verdadera para poderla tomar como tal. Sin embargo, el plano habrá dejado de ser tangente y se habrá convertido en rasante, lo cual basta, en general, en la práctica.

Si la zona fuese alabeada, figura 149, el plano tangente en el punto p lo sería á lo largo de las generatrices $p\ a$ ó $p\ b$; y estas rectas, en unión de la tangente $p\ s$ á la curva de cota 14, darían dos planos $m_{14}\,n_{13}$ y $r_{15}\,s_{14}$, soluciones análogas á las del caso anterior.

Una diferencia existe, sin embargo, entre este caso y el otro. En este último, las horizontales $a\ n$ y $b\ r$ no serán tangentes á las curvas de cota 13 y 15 respectivamente, sino secantes; y por consiguiente, los planos $m\ n$ y $r\ s$, además de ser tangentes en p, cortarán á las zonas en las inmediaciones del punto de contacto y según curvas que se determinarían hallando la sección por dichos planos. La $g\,e\,f$ es la del plano $m\ n$.

237. *2.° caso.—El punto dado* p' *se halla en una zona.*

Si la zona es desarrollable (fig. 148), el problema no tiene más solución que la dada por la generatriz única *p p' a*, y por las tangentes *m p s* y *n a*, que determinan el plano m_0 n_8.

Si la zona es alabeada (fig. 149), interpolando la curva intermedia entre las de cota 14 y 13 que pasa por el punto *p'*, quedaría este caso reducido al anterior, y las soluciones serían los planos v_{14} $u_{13,5}$ y $z_{13,5}$ x_{13}.

También podrían considerarse como soluciones aproximadas de posiciones del plano rasante, las que resultasen de hacer girar uno de los planos tangentes hasta confundirse con el otro.

Planos tangentes por un punto fuera (1).

238. En Geometría descriptiva este problema se resuelve por el método general de tomar el punto dado por vértice de una superficie cónica envolvente de la propuesta y los planos tangentes á esta superficie lo serán también á la dada en puntos de la curva de contacto.

El mismo procedimiento se emplea en el Sistema de Acotaciones, por lo cual el problema se divide en dos partes: 1.ª, hallar una superficie envolvente de la dada, y 2.ª, trazar planos tangentes á la superficie hallada.

239. *1.ª parte.*—**Superficie cónica envolvente.**—La determinación de una superficie cónica envolvente de una irregular es sencillísima, pero muy larga y pesada por las muchas construcciones que exige, por lo cual se recurre á métodos abreviados.

Sea la superficie irregular representada en la figura 150, la cual se supone limitada en los costados por dos planos verticales *X X* y *Z Z* y V_8 el punto dado, por el cual han de trazarse los planos tangentes.

El punto V_8 será el vértice de la superficie cónica envolvente de

(1) Este problema es el resuelto en el párrafo 187 bajo otro enunciado.



la dada, y para hallar sus generatrices se cortará ésta por planos verticales que pasen por dicho punto, tales como los *V R, V S, V T*...., etc. Cada uno de estos planos dará una sección, la cual, abatida sobre el plano horizontal, permitirá trazar desde el abatimiento de U_8 una ó varias tangentes, que no serán otra cosa sino les generatrices de la superficie envolvente buscada.

El punto ó puntos de tangencia *a, b, c*....., etc., se proyectarán y acotarán sobre las trazas respectivas de los planos *V R, V S, V T*....., etc., y si éstos se hallasen bastante próximos unos de otros, se obtendrían una serie de puntos de tangencia, que serían suficientes para unirles por un trazo continuo y determinar la curva de contacto de la envolvente con la superficie dada.

Las rectas de unión del vértice con los puntos de la curva de contacto serían las generatrices de la envolvente.

En la figura se ve hecha esta operación en el perfil *V R*, el cual ha dado el punto de tangencia A_1 y *a* en la generatriz.

240. **Método abreviado.**—El método directo que se acaba de indicar, además de ser muy largo, tiene el inconveniente de las muchas construcciones que son necesarias, las cuales hacen confuso el dibujo; y aunque esto último podría evitarse empleando el papel de calco, siempre quedaría el procedimiento largo y penoso.

Las operaciones pueden abreviarse y limitarse las construcciones á un corto número de líneas, fundándose en lo dicho en el párrafo 193 (1) acerca de los ángulos que forman las horizontales de

---

(1) La demostración dada en el párrafo 193 puede hacerse de otro modo más general.

Si se toma una recta cualquiera $p_6\ q_{13}$ (fig. 151), como charnela para hacer girar un plano que pase por ella; y sobre un plano horizontal, por ejemplo, el de cota 10, se van trazando las horizontales de las diversas posiciones por que va pasando el plano en su giro, se observará:

1.° Que cuando el plano que pase por *p q* sea vertical, ó forme un ángulo de 90°, su horizontal de cota 10 se confundirá con la proyección de *p q*, y, por tanto, formará con ella un ángulo de 0°.

2.° Que si el plano empieza su giro alrededor de la charnela, el ángulo con el horizontal irá disminuyendo y las horizontales de las diversas posi-

las diversas posiciones de un plano que va tomando inclinaciones diversas girando alrededor de una recta como charnela, y aplicándolo á las curvas de los perfiles, según se indica á continuación.

241. **Aplicación á los perfiles.**—1.° *Curva convexa.*—La tangente á una curva de un perfil es fácil trazarla sin necesidad del abatimiento de éste.

---

ciones serán las $r\,a$, $r\,a'$, $r\,a''$, las cuales irán formando con la parte descendente de la $p\,q$, ángulos α, α', α'' cada vez mayores hasta llegar á la $r\,h$, en que el ángulo será de 90°; pero en esta posición del plano, la recta $p\,q$ es perpendicular á la horizontal $h\,h$ y, por lo tanto, será la escala de pendiente del plano ó su línea de máxima pendiente, y formará con el horizontal el ángulo *mínimo.*

3.° Si continúa el movimiento del plano, las horizontales serán las $r\,a'''$, $r\,a^{IV}$..... que formarán ángulos α''', α^{IV}..... mayores que 90° y que irán creciendo hasta llegar á valer 180°, que será cuando la horizontal se confunda con $r\,q$, prolongación de la $p\,r$.

Desde la posición $r\,h$ del plano á la $r\,q$, este plano habrá ido aumentando su ángulo con el horizontal de proyección, desde el ángulo *mínimo* en $r\,h$ hasta 90° en $r\,q$, que es cuando vuelve á ser vertical.

Si en este caso en vez de tomar los ángulos obtusos α''', α^{IV}....., etc., que forman las horizontales con $p\,q$ se consideran los ángulos β''', β^{IV}....., etc., formados por las prolongaciones $r\,b'''$, $r\,b^{IV}$....., etc., se verificará lo mismo que en el 2.° caso.

4.° Si se continuase el movimiento del plano, se irían obteniendo las prolongaciones de las horizontales anteriores, puesto que $r\,b$ es la de la $r\,a$, y así las demás.

De lo expuesto se puede deducir lo siguiente:

Si un plano gira alrededor de una charnela, los ángulos que las horizontales de sus posiciones irán formando con la proyección de dicha recta en su parte descendente, variarán en razón inversa del ángulo que forma el plano dado con el horizontal, hasta que aquéllas llegan á 90°, y en razón directa, desde esta posición hasta que llegan á 180°.

Pero si se consideran las posiciones $r\,a'''$, $r\,a^{IV}$....., etc., y se las prolonga del otro lado de r, se verá que los ángulos que forman con la parte descendente de $r\,q$ seguirán también la misma ley que en el primer caso, por lo cual la regla puede enunciarse del modo siguiente:

Regla.—*A medida que crece el ángulo que forma con el horizontal, un plano que gira alrededor de una charnela, decrece el que forman las horizontales correspondientes con la parte descendente de la proyección de aquélla; siempre que se considere este último ángulo en la parte de la horizontal que forma ángulo agudo con la charnela.*

Sea, en efecto, un perfil tal como el $V_8 R$ de la figura 150, que representa una curva convexa.

Abatiendo el perfil, se ve que la tangente desde V_8 tiene su punto de tangencia en A_1, proyectándose en a_{18} en el perfil. Se puede prescindir del abatimiento anterior, si por V se traza una recta cualquiera, tal como $V Y$, á la cual se hace servir de charnela de un plano que vaya apoyándose en los diversos puntos de la curva, á partir del de menor cota. Las horizontales de las diversas posiciones del plano serían las rectas 11-11, 12-12, 13-13..... 20-20, que resultasen de unir los puntos de igual cota de la recta y de la curva.

Estas horizontales hacen ver que el ángulo *agudo* que forman con la parte descendente de la $V Y$, á partir de la 12-12, va disminuyendo hasta la 18-18, y desde ésta aumentando; luego el plano en sus diversas posiciones va formando mayor ángulo con el horizontal de proyección, hasta que en 18-18 forma el ángulo *máximo* para luego decrecer.

Si ahora se observan las rectas que unen el punto V_8 con los puntos 11, 12, 13..... 20 del abatimiento de la curva, y que son intersecciones de las posiciones del plano con el vertical del perfil, se ve que sus ángulos con la $V R$ van creciendo hasta la $V A_1$ para luego decrecer; y, por consiguiente, que la posición en que el plano toca á la curva dejándola toda debajo, es la que pasa por el punto de cota 18, correspondiente á la posición del plano que forma mayor ángulo con la horizontal.

En todas las demás posiciones el plano cortará á la curva, lo cual se comprueba sin más que prolongar en el abatimiento las rectas V-11, V-12..... V-20, viéndose que todas ellas, menos la V-18, la cortan efectivamente.

242. **Regla.**—Se deduce de lo dicho la regla siguiente para hallar la tangente á una curva convexa de un perfil por un punto dado.

Trácese por el punto una recta arbitraria; únanse los puntos de esta recta con los de igual cota de la curva del perfil, y búsquese entre

estas rectas la que forme con la parte descendente de la primera un ángulo agudo que sea un mínimo, *y el punto correspondiente de la curva será el de tangencia; el cual, unido al punto dado, determinarán la tangente pedida.*

243. 2.° *Curva cóncava.*—Si se tratase de un perfil con una curva cóncava se deducirá una regla inversa. En efecto; en la figura 152 se ve la curva abatida y su tangente $V A_1$, así como la recta $V Y$ que hace de charnela, las horizontales 10-10, 11-11, 12-12, etc., de las posiciones del plano y las intersecciones de éstas con el perfil; y de ellas se deduce que para que haya tangente es necesario que el plano auxiliar se apoye en la curva, dejándola toda encima, correspondiendo esta posición á la del plano que forma el ángulo *mínimo* con el horizontal, y, por lo tanto, que su horizontal forme el ángulo agudo *máximo* con la parte descendente de la charnela. En la figura es el α correspondiente á la horizontal 12-12.

244. 3.° *Curva cóncavo-convexa.*—Se comprende que teniendo un perfil trozos de curvatura cóncavos y convexos se puede descomponer en trozos de igual curvatura, y á cada uno de ellos aplicarle la regla anterior; pudiendo, por tanto, decirse: que para trazar una tangente á una curva, habrá que buscar en los ángulos agudos que forman las horizontales dichas con la parte descendente de la charnela, los *mínimos*, en las partes convexas, y los *máximos*, en las cóncavas.

Si la curva presentase varias inflexiones y se quisiese hallar entre las varias tangentes que puede admitir, cuáles son las que dejan debajo á toda la curva ó las que la dejan encima, no habría sino buscar para las primeras las horizontales que formasen el *menor* de los *mínimos*, y para las segundas las que formasen el *mayor* de los *máximos*.

245. Observación.—En la práctica no es necesario trazar las horizontales de las posiciones del plano auxiliar para hallar los ángulos *mínimos* y *máximos*. En efecto, si en el perfil $V R$ de la

figura 150 se coloca una escuadra de modo que su borde coincida con las cotas 11-11 de la horizontal primera, y después se hace correr la escuadra paralelamente asimisma hasta que pase por el punto de cota 12 de la curva, se verá por la inclinación de la escuadra que la horizontal 12-12 formará un ángulo mayor que el anterior con la parte descendente de la recta *V Y.*

Colocando el borde de la escuadra sobre las cotas 12-12 y corriéndola paralelamente hasta que pase por el punto 13, se verá que la nueva horizontal 13-13 formará ángulo menor que el anterior; y siguiendo del mismo modo se notará que hasta la horizontal 18-18, el ángulo ha ido disminuyendo, y en la 19-19 empieza á ser mayor; por lo tanto, el ángulo *mínimo* está en la 18-18, el cual se obtiene sin necesidad de haber trazado más recta en el papel que la auxiliar *V Y.*

246. **Determinación de la superficie cónica envolvente.** Después de lo expuesto como preliminar para la aplicación del método abreviado para hallar la superficie cónica envolvente de una irregular cualquiera, fácil es obtener ésta.

Sea la superficie irregular de la figura 150.

Cortada por los perfiles *V R, V S, V T*..... se trazará la recta auxiliar *V Y,* en la cual se marcarán las cotas iguales á las de las curvas horizontales de la superficie; y en cada perfil, se irán determinando las tangentes respectivas, según que las curvas de él sean convexas, cóncavas ó cóncavo-convexas.

En estas tangentes se marcará el punto de tangencia en el perfil, como se ve en los a_{14}, b_{19}, c_{16}, d_{15}, e_{17}, f_{14}; y estos puntos unidos por un trazo continuo determinarán la curva directriz de la superficie cónica envolvente; la cual será, al mismo tiempo, la curva de contacto de las dos superficies, y habrá sido obtenida sin trazar en el papel más rectas que las *V R, V S*..... etc., que marcan los perfiles y la auxiliar *V Y.*

247. **Superficie cónica rasante.**—La disposición de la superficie irregular, así como la del punto *V,* puede ser tal, que

en muchos casos no haya posibilidad de trazar desde dicho punto tangentes á las curvas de los perfiles; como, por ejemplo, sucedería en el perfil *V R*, si la curva terminase en el punto de cota 16, ó como se ve en la figura 101 de la lámina 3.ª. En estos casos se substituirá la tangente por una rasante á la curva del perfil, y en vez de ser ésta la generatriz de una superficie cónica tangente á la dada, lo será de una cónica rasante, y los planos tangentes y rasantes á esta cónica serán, en general, rasantes á la superficie propuesta, lo cual basta para las aplicaciones.

La determinación de una superficie cónica rasante de la dada es más fácil aún de obtener que la superficie tangente, pues en los perfiles, en vez de buscar las horizontales del plano auxiliar que formen ángulos agudos *mínimos* ó *máximos* con la parte descendente de la charnela, se buscará las que formen el ángulo *menor* ó el *mayor*, y á éstas corresponderá la rasante que respectivamente deje debajo ó encima á toda la curva.

Hallados los puntos donde las rasantes se apoyan en las curvas, bastará unirles por un trazo continuo para obtener la curva directriz de la superficie cónica rasante.

Resuelto el problema de hallar la superficie cónica tangente ó rasante á la superficie irregular, el trazar planos tangentes ó rasantes á ésta, queda reducido á los ya resueltos en los párrafos del 230 al 234; siempre que de antemano se haya hallado la sección de la cónica por un plano horizontal (213); que en la figura 150 es la causada por el plano de cota 14 que ha dado la curva plana y horizontal a'_{14} b'_{14} c'_{14} d'_{14} e'_{14} f'_{14}.

248. PROBLEMAS.—Los problemas que pueden resolverse respecto á los planos tangentes y rasantes á una superficie irregular dada, por un punto fuera, son los ya indicados en los párrafos antes dichos, y se reducen á los siguientes:

1.° Plano tangente ó rasante á una superficie irregular en un punto de la curva de contacto de la envolvente y de la dada.

2.° Plano tangente ó rasante á una superficie irregular que no corte al resto de la superficie.

3.° Plano tangente ó rasante á una superficie irregular, en puntos determinados de una de sus curvas horizontales.

4.° Plano tangente ó rasante á una superficie irregular y que además forme con el horizontal de proyección un ángulo dado.

5.° Plano tangente ó rasante superior ó inferior á una superficie irregular; y

6.° Determinación de la parte visible é invisible de una superficie irregular dada desde un punto fuera de ella (1).

Los cinco primeros han sido resueltos para el caso de planos tangentes á una superficie cónica, y es inútil repetir aquí la solución, así como insistir en el cuidado que es necesario tener en el 5.° problema para ver si las curvas de sección por el plano horizontal, en la superficie cónica envolvente, provienen de la intersección con las generatrices de la hoja hallada, ó con las prolongaciones de aquéllas, ó si hay curvas que pertenecen á los dos casos, á fin de no equivocarse en la elección de la tangente que sirva para determinar el plano tangente superior ó inferior á la superficie irregular.

Respecto á los planos rasantes superior ó inferior, bastará substituir á la tangente, que en el caso anterior sirve para determinar el plano tangente; por una rasante que ocupe respecto á la curva ó curvas de sección y al vértice de la cónica, una posición análoga á la de dicha tangente.

En la figura 150 si la curva $a'_{14}\, b'\, c'\, d'\, e'\, f'_{14}$ de sección de la cónica terminase como se ve de puntos en la parte de la derecha $a'_{14}\, x'_{14}$ ó en la de la izquierda $f'_{14}\, g_{14}$, no podría trazarse la tangente en f'_{14} que determina el plano tangente superior; pero, en cambio, podría trazarse la rasante que pasase por los puntos g_{14} y x'_{14}, la cual, con la generatriz $V_8\, x'_{14}$ determinaría una solución del plano rasante superior.

(1) Este problema es el resuelto en el párrafo 187.

El 6.° problema, resuelto en el párrafo 187, se comprende que podría serlo aquí con gran rapidez y con muchas menos construcciones, sin más que aplicar los métodos para trazar á cada perfil todas las tangentes ó rasantes que sea posible y unir convenientemente, por un trazo continuo, los puntos análogos en todos los perfiles que correspondan á aquellos que tocan ó rasan á las curvas; lo cual daría una serie de curvas que serían las que marcasen la separación entre las partes visibles é invisibles de la superficie desde el punto dado.

Planos tangentes paralelos á una recta dada.

249. **Superficie cilíndrica envolvente.**—A la superficie cónica envolvente del caso anterior, se substituye en éste una superficie cilíndrica envolvente de la superficie irregular y paralela á la recta dada.

Los planos tangentes á esta nueva superficie lo serán á las dos en los puntos de la curva de contacto.

El problema queda reducido á trazar á una superficie irregular, una cilíndrica que la envuelva y cuyas generatrices sean paralelas á la recta dada.

250. **Método general.**—Paralelamente á esta recta se trazan una serie de planos paralelos entre sí, se hallan sus intersecciones con la superficie irregular; y á las curvas de sección, se las trazan tangentes paralelas á la recta dada.

Si los planos auxiliares han sido trazados suficientemente próximos unos de otros, la serie de tangentes halladas formarán un haz, que no será otra cosa sino las generatrices de la superficie cilíndrica envolvente que se buscaba.

Unidos por un trazo continuo los puntos de tangencia de cada curva de sección, darán una curva, que será la de contacto de las dos superficies.

251. **Método abreviado.**—Este problema exige al parecer

numerosas construcciones, como son, el trazar los planos paralelos auxiliares, hallar sus intersecciones con la superficie irregular, etc., y, sin embargo, en la práctica se puede hacer todo con muy pocas líneas.

Sea, en efecto, la superficie irregular de la figura 153 y $p_{14}\, q_4$ la recta dada.

Supóngase que el primer plano auxiliar pasa por la recta $p\, q$ y por una horizontal elegida arbitrariamente, pero de modo que corte casi normalmente á las curvas de la superficie que tengan la misma cota que ella.

En la figura, este plano es el $m_{14}\, n_{18}$ que pasa por la recta $p_{14}\, q_4$ y la horizontal elegida $p_{14}\, m_{14}$.

Trazando las demás horizontales del plano, 13-13, 12-12....., si se quiere hallar la intersección con la superficie, bastará unir por un trazo continuo los puntos a, b, c..... en que las horizontales 14-14, 13-13..... cortan á las curvas de igual cota, para tener la curva de sección $a\, b\, c\, d\, e\, f\, g\, h\, i\, j\, k$ por el citado plano $m_{14}\, n_{13}$.

El nuevo plano auxiliar paralelo al anterior elíjase de modo que pase una unidad más bajo ó más alto; y será el $m_{13}\, n_{12}$ ó el $m_{15}\, n_{14}$; sus horizontales en proyección serán las mismas anteriores, sólo habrán variado sus cuotas, que valdrán, respectivamente, una unidad menos ó una más, y su intersección con la superficie se hallará del mismo modo, siendo la del $m_{13}\, n_{12}$ la $a'\, b'\, c'\, d'\, e'\, f'\, g'\, h'\, i'\, j'$, y la del $m_{15}\, n_{14}$ la $b^{IV}\, c^{IV}\, d^{IV}$.....

Repitiendo lo mismo para los planos auxiliares restantes, se obtendrán análogamente las intersecciones $a''\, b''\, c''$.....; todas ellas sin haber trazado más rectas que las horizontales del primer plano auxiliar.

Halladas las curvas de sección, se las trazarán las tangentes $t\, t$, $t'\, t'$..... $t^{IV}\, t^{IV}$ paralelas á la $p_{14}\, q_4$, las cuales serán las generatrices de la superficie cilíndrica envolvente.

Los puntos de tangencia x, x'..... x^{IV}, unidos por un trazo continuo, darán la curva de contacto de las dos superficies.

252. **Nueva abreviación.**—Las horizontales 14-14, 13-13..... trazadas en la figura, pueden suprimirse procediendo del modo siguiente:

Se colocará una escuadra pasando por el punto p_{14} en la dirección *p a* elegida convenientemente para horizontal del primer plano auxiliar y se marcará con un lápiz el punto *a* en que corta á la curva de igual cota; el cual será de la sección por el plano m_{14} n_{13}. Del mismo modo se marcará el punto *a'* en que corta á la curva de cota 13, y éste será un punto de intersección con la posición del segundo plano auxiliar m_{13} n_{12}.

Análogamente se marcarían los demás puntos *a'' a'''*..... de las curvas de cota inferior y superior á la 14, y después, corriendo la escuadra paralelamente hasta que pasen por el punto de cota 13 de la *p q*, se marcarían del mismo modo los puntos de intersección *b, b', b'',.... b*^{IV}.

Repetida esta operación por los puntos de cota redonda de la recta *p q*, se hallarían todos los puntos de las curvas de sección de los planos auxiliares paralelos á la recta p_{14} q_4 sin necesidad de haber trazado ni una sola línea en el papel, y bastaría unirles convenientemente por un trazo continuo para tener las curvas de sección.

253. **Superficie cilíndrica rasante.**—Se comprende que habrá muchos casos en que no será posible trazar las tangentes *t t, t' t'*..... á las curvas de sección de los planos auxiliares, paralelamente á la recta dada; pero siempre se podrán trazar rasantes en estas condiciones.

El conjunto de estas rasantes y tangentes serán las generatrices de una superficie cilíndrica rasante á la dada. Si en la figura la curva de sección b^{IV} c^{IV} d^{IV}..... etc., tuviese la forma de la parte x^{IV} r^{IV}, no habría posibilidad de trazar la tangente paralela á la p_{14} q_4; pero sí podría trazarse la rasante r^{IV} r^{IV}, y de un modo análogo proceder en otras curvas.

254. **Planos tangentes ó rasantes paralelos á una recta.**

Hallada la superficie cilíndrica tangente ó rasante, el problema de trazar planos tangentes ó rasantes á la superficie irregular y paralelos á la recta dada, queda reducido á trazar planos tangentes á la superficie cilíndrica hallada, puesto que todos éstos lo serán también á la dada, y, por consiguiente, habrá una infinidad de soluciones, determinadas cada una por la generatriz de la superficie cilíndrica y la tangente ó rasante á la curva de contacto en el punto en que aquélla la corta; ó también en substitución de esta recta, la tangente ó rasante á la curva horizontol de la superficie dada en el punto de tangencia.

Planos tangentes pasando por una recta.

255. **Método general.**—Si se considera un punto de la recta dada, como vértice de una superficie cónica envolvente de la superficie irregular, y se traza la primera superficie, el problema queda reducido á trazar los planos tangentes á la cónica por una recta que pasa por su vértice, problema ya resuelto en los párrafos 204 á 207.

Será necesario, por consiguiente:

1.° Hallar la cónica envolvente, y cuyo vértice sea un punto de la recta.

2.° Cortar á esta cónica por un plano horizontal para hallar su sección, y

3.° Trazar planos tangentes á la cónica pasando por la recta.

256. **Método abreviado.**—Como se ve, las operaciones son conocidas, pero largas, y hay un medio de abreviarlas y resolver el problema con mayor sencillez y con la suficiente aproximación para los casos que en la práctica se presentan con más frecuencia, que son aquellos en que se busca el plano tangente ó rasante superior á la superficie irregular pasando por la recta.

257. *1.er caso.*—**Recta muy inclinada.**—En efecto, en los párrafos 192 y 193 se ha resuelto este problema para el caso en

que la posición de la recta sea inclinada. (Véase lámina 5.ª, figura 134.)

Analizando este caso se observa que las diversas tangentes ó rasantes $a_5\ n'_5\ b_{10}\ b'_{10}$..... $f_{30}\ f'_{30}$ son rectas paralelas al plano horizontal, las cuales pueden considerarse como apoyadas en la recta dada *m n* y en la superficie, ó mejor que en ésta, en la curva que resultaría de unir por un trazo continuo los puntos *a b c d e f.*

Esta serie de rectas pueden tomarse como las posiciones de una de ellas sujeta á moverse paralelamente al plano horizontal y apoyándose en la recta y curva citadas, engendrando, por consiguiente, un conoide envolvente de la superficie irregular, y cuyos planos tangentes, pasando por la recta *m n,* serán comunes al conoide y á la superficie dada.

Entre todos estos planos, el que forma un ángulo *máximo* ó el *mayor* con el horizontal, será el tangente ó el rasante á la superficie, y se reconocerá, porque su horizontal formará el ángulo agudo *mínimo* ó *menor* con la parte descendente de la recta *m n,* que en este caso sirve de charnela; siendo en la figura, el α'', correspondiente al plano $r''_5\ s''_{10}$.

258. *2.º caso.*—**Recta horizontal** (1).—El caso en que la recta dada sea horizontal, se halla ya resuelto en los párrafos del 188 al 192; pero observando atentamente lo hecho en la figura 132, se ve: que el conoide del caso anterior ha quedado reducido en este caso á un cilindro horizontal envolvente de la superficie irregular, pudiendo este cilindro ser tangente ó rasante, según sea posible trazar tangentes ó rasantes á las curvas y paralelas á la horizontal dada.

En la citada figura se puede prescindir de hallar las rectas $M_7\ A$, $M_7\ B$..... $M_7\ F$, para determinar el plano tangente ó rasante superior, haciendo uso de un perfil como el *q X* de la figura 154,

---

(1) Este caso es de una gran aplicación á la desenfilada y ocurre con frecuencia.

lámina 7.ª, y aplicándole el procedimiento ya tantas veces indicado para hallar la posición del plano que, apoyándose en la curva del perfil, la deje toda debajo siéndola tangente ó rasante. La horizontal 13-13 que forma el ángulo agudo *mínimo*, con la parte descendente de la recta auxiliar $q\ Y$, en unión de la generatriz $t\ n_{13}$ de la cónica envolvente, determinan el plano $m_9\ n_{13}$ tangente superior á la superficie irregular dada.

259. *3.er caso.*—**Recta casi horizontal** (1).—Existe un tercer caso muy frecuente en la práctica y al cual no son aplicables ninguno de los dos métodos anteriores, y es aquel en que la recta dada tiene muy poca inclinación.

Sea, en efecto, la superficie irregular de la figura 155 y $p_6\ q_5$ la recta dada.

Para aplicar el método del conoide, como en el primer caso, sería necesario prolongar extraordinariamente la recta á fin de poder hallar las cotas que harían falta, para desde ellas trazar las tangentes ó rasantes á las curvas de la superficie.

El método del segundo caso tampoco puede emplearse, porque las curvas son horizontales; pero las tangentes que se han de trazar á la superficie no pueden serlo.

Hay, sin embargo, un método análogo al del párrafo 251.

Imagínense una serie de planos paralelos entre sí que corten á la superficie y á la recta dada. Hállense las intersecciones de estos planos auxiliares con la superficie y con la recta, y desde los puntos en que corten á esta última trácense tangentes ó rasantes á las curvas de la sección correspondiente.

Estas tangentes ó rasantes serán otras tantas generatrices de un conoide envolvente de la superficie, que tendrá por plano director uno paralelo á los planos auxiliares; por directrices, la recta dada y la curva que se obtenga uniendo los puntos de contacto de las tangentes, ó de intersección de las rasantes, y por

(1) Este caso también es de gran aplicación en la desenfilada.

generatriz, una recta que, moviéndose paralelamente al plano director, se vaya apoyando en las dos directrices.

En la figura se ha trazado un plano auxiliar $m_{12} n_{10}$, y las horizontales de igual cota que las curvas de la superficie irregular; se ha hallado la sección *a b c d e f g h* causada en ésta, y la intersección $r_{5,3}$ con la recta dada $p_6\, q_5$, valiéndose para esto último de las horizontales q 5 y p 6 de un plano auxiliar nuevo que pasa por $p\, q$ y encuentra al $m_{12} n_{10}$ según la recta $6\, r\, 5$.

Desde $r_{5,3}$ se ha trazado la tangente $r_{5,3}\, t_{9,6}$ á la curva *a b c d..... h*, obteniéndose el punto t de tangencia.

Repitiendo la operación para otro plano $m'_{10}\, n'_8$ cuyas horizontales tengan las mismas proyecciones que las del anterior pero con cotas de unidades más bajas, se ha hallado la curva de sección *a' b' c' d' e' f'*, el punto $r'_{5,5}$ de intersección con la $p\, q$, y también la tangente $r'_{5,5}\, t'_{7,5}$ con su punto de tangencia t'.

Se comprende que repitiendo la operación se llegarían á encontrar una serie de tangentes ó rasantes que serían las generatrices del conoide envolvente de la superficie dada, y buscando entre todas ellas la que forme el ángulo agudo *mínimo* ó el *menor* con la parte descendente de la recta $p\, q$, estas dos rectas darían el plano tangente ó el rasante superior buscado.

En la práctica, claro es que puede abreviarse la operación y evitarse el trazado de las horizontales de los planos auxiliares, procediendo como se ha dicho en el párrafo 252 para la figura 153.

Planos tangentes paralelos á un plano.

260. **Método general.**—En el plano dado se eligen dos rectas arbitrarias pero que no sean paralelas, y se hallan dos superficies cilíndricas envolventes de la superficie irregular dada y paralelas á las direcciones elegidas, hallando también las curvas de contacto.

Si estas curvas se cortan, el plano determinado por las dos

generatrices, una de cada superficie cilíndrica, que pasen por los puntos de intersección, serán las soluciones del problema.

Por lo dicho se ve que hay necesidad de repetir dos veces las construcciones del párrafo 252, lo cual es muy pesado.

En la práctica se procede de un modo más rápido.

261. **Método abreviado.**—Sea la superficie de la figura 156 y $m_8\ n_6$ el plado dado.

Trácense tangentes ó rasantes á las curvas horizontales de la superficie dada, y que sean paralelas á las del plano *m n*; ó lo que es lo mismo, hállese la superficie cilíndrica horizontal envolvente, tangente ó rasante á la superficie dada, y búsquese, entre las generatrices, dos consecutivas, cuya separación sea igual á la que marca la pendiente del plano dado; y éstas serán las horizontales de un plano tangente ó rasante á la superficie, cuya pendiente será igual á la del dado, y, por lo tanto, paralelo á él, si el sentido de las cotas es el mismo.

En la figura, *t a, t' b, t'' c, t''' d,* t^{IV} *e* son las generatrices de la superficie cilíndrica envolvente; *a b c d e* la curva de contacto, y *t'' c* y *t''' d* las horizontales cuya distancia *r s* es igual á la m_8 7 de la escala de pendiente del plano dado $m_8\ n_6$, y, por lo tanto, $r_{12}\ s_{11}$ es el plano tangente buscado, puesto que sus cotas y las del *m n* van en el mismo sentido.

Si entre las generatrices del cilindro no hubiese dos consecutivas cuya separación fuese igual á la de la escala de pendiente del plano dado, no habría solución, teniendo que contentarse con la más aproximada.

Plano tangente ó rasante á varias superficies.

262. *1.er caso.*—**Plano tangente á dos superficies.**—MÉTODO GENERAL.—El problema se reduce á substituir á las dos superficies propuestas por una que las envuelva, y los planos tangentes ó rasantes á ésta lo serán á las dadas.

Elíjase un plano arbitrario como plano director de un conoide, trácense una serie de planos paralelos á éste, hállense sus intersecciones con las dos superficies, y á estas curvas trácense las tangentes ó rasantes comunes. El conjunto de tangentes ó rasantes serán las diversas generatrices del conoide envolvente de las dos superficies á la vez, y sus planos tangentes ó rasantes, lo serán á las dos superficies dadas.

Si se uniesen por un trazo continuo en cada curva los puntos de contacto de las diversas tangentes, se obtendrían dos curvas de contacto, las cuales podrían considerarse como las directrices del conoide, sobre las cuales se iría apoyando la generatriz con la condición de permanecer paralela al plano director.

263. **Método del tanteo.**—Si en vez de pedirse, en general, un plano tangente á las dos superficies se pidiese el que en la práctica tiene utilidad, como es el plano tangente ó rasante superior ó que deja debajo á las dos superficies, podría obtenerse una resolución más rápida recurriendo á los tanteos.

Sean las superficies *A* y *A′* (fig. 157).

La superficie *A* tiene 16 por cota más alta, y la *A′*, la cota 12; por consiguiente, el plano que siendo tangente á la vez á las dos las ha de dejar debajo, tendrá una posición inclinada de *A* á *A′*.

Si en la superficie *A* se traza una tangente ó rasante á la curva de cota superior y se toma como charnela de un plano que vaya girando hasta apoyarse en la curva de cota superior de *A′*, para que las dos superficies queden debajo del plano, será necesario: 1.° Que la charnela sea tangente ó rasante en la parte de la curva de cota 16 que está hacia la superficie *A′*, tal como la *a m*; pues si se trazasen, por ejemplo, por el punto *b*, desde luego, el plano que pasase por ella y tuviese que apoyarse en la curva 12 de *A′* cortaría á la curva de cota 16, puesto que en el punto *b* el plano tendría la cota 16; pero como va descendiendo, al pasar por la vertical que pasa por *a*, ya tendría menor cota que la curva 16, y, por lo tanto, la cortaría. 2.° Por una razón análoga, el plano no

se podrá apoyar en la parte b' de la curva 12 de A', sino en la opuesta, como la a'; así, pues, los tanteos quedan muy limitados.

Desde luego en la figura se puede ver una solución en el plano $m_{16}\, n_{12}$, obtenido trazando la tangente $a\,m$ á la curva 16 de A, y por la paralela $a'\,n$ tangente á la curva 12 de A' en el punto a', que es el más alejado de la A, y, por lo tanto, el que con más probabilidades dará solución.

Si se quiere comprobar si el plano $m_{16}\, n_{12}$ satisface á la condición de dejar debajo á las dos superficies A y A', bastará trazar sus horizontales de cotas iguales á las de las curvas de las superficies y ver si cortan á éstas ó pasan por encima de ellas.

En la figura pasa esto último y, por lo tanto, el plano $m_{16}\, n_{12}$ es una solución.

Existen más soluciones que la anterior, puesto que se concibe la posibilidad de trazar una recta tal como la $c\,c'$, tangente á las curvas de cota superior de A y de A', y que las deje á las dos del mismo lado, y que por esta recta pasen planos que puedan tocar ó rasar á las superficies en la parte de la izquierda.

Hallados algunos de estos planos, bastaría trazar sus horizontales y ver si cortaban á las curvas de igual cota, para ver si había que desecharles ó eran soluciones del problema.

En la práctica no hay necesidad de trazar las horizontales de los planos, bastando ver por sus direcciones marcadas por el borde de una escuadra si cortan ó no á las curvas de igual cota.

264. *2.º caso.*—**Plano tangente á tres ó más superficies.** MÉTODO GENERAL.—Si las superficies, en vez de ser sólo dos, fuesen tres ó más, el problema se complica y se hace más pesado.

Supóngase que las superficies están representadas por las letras A, A', A'', A'''.....

Se hallará una envolvente de las A y A', y otra de la A y A''; se construirán las curvas de contacto de las dos con la A, y cada punto común de estas curvas cumplirá con la condición de que el plano tangente á una de las envolventes lo será á las tres super-

ficies A, A' y A''; y análogamente en caso de ser en mayor número las superficies.

265. **Método por tanteo.**—Se comprende las muchas construcciones y confusiones á que el método general daría lugar, y se procede por tanteos como en el caso de dos superficies.

Sean A, A' y A'' las tres superficies dadas por su orden de elevación: A, cuya curva más alta es de cota 16; A' con la de cota 12, y A'' con la de cota 11.

Análogamente á como se indicó en el caso anterior, búsquese una charnela como la $c\,c'$ que sea tangente ó rasante á las curvas más altas de A y de A', y por ella hágase pasar un plano que venga á apoyarse en la parte a'' de la curva 11 de A''.

El plano determinado por la charnela $c\ c'$ y por la $c'\ a''$ tiene grandes probabilidades de ser una solución por la posición que ocupa respecto á las curvas de cotas más altas de las superficies; pero para cerciorarse de ello se hallarán sus horizontales $a''\ s_{11}$ y $c'\ r_{12}$ y su escala de pendiente $r_{12}\ s_{11}$, y si este plano no corta á las superficies, como en la figura, será una solución.

Es muy difícil, si no imposible, dar regla alguna para los tanteos, pues han de variar según la clase, posición y número de superficies, siendo únicamente la práctica, que se adquiere con facilidad, la que puede servir de guía para cada caso.

FIN

ÍNDICE

SISTEMA DE ACOTACIONES

SEGUNDA PARTE

IV

Planos tangentes y rasantes á las superficies.

Planos tangentes en general.

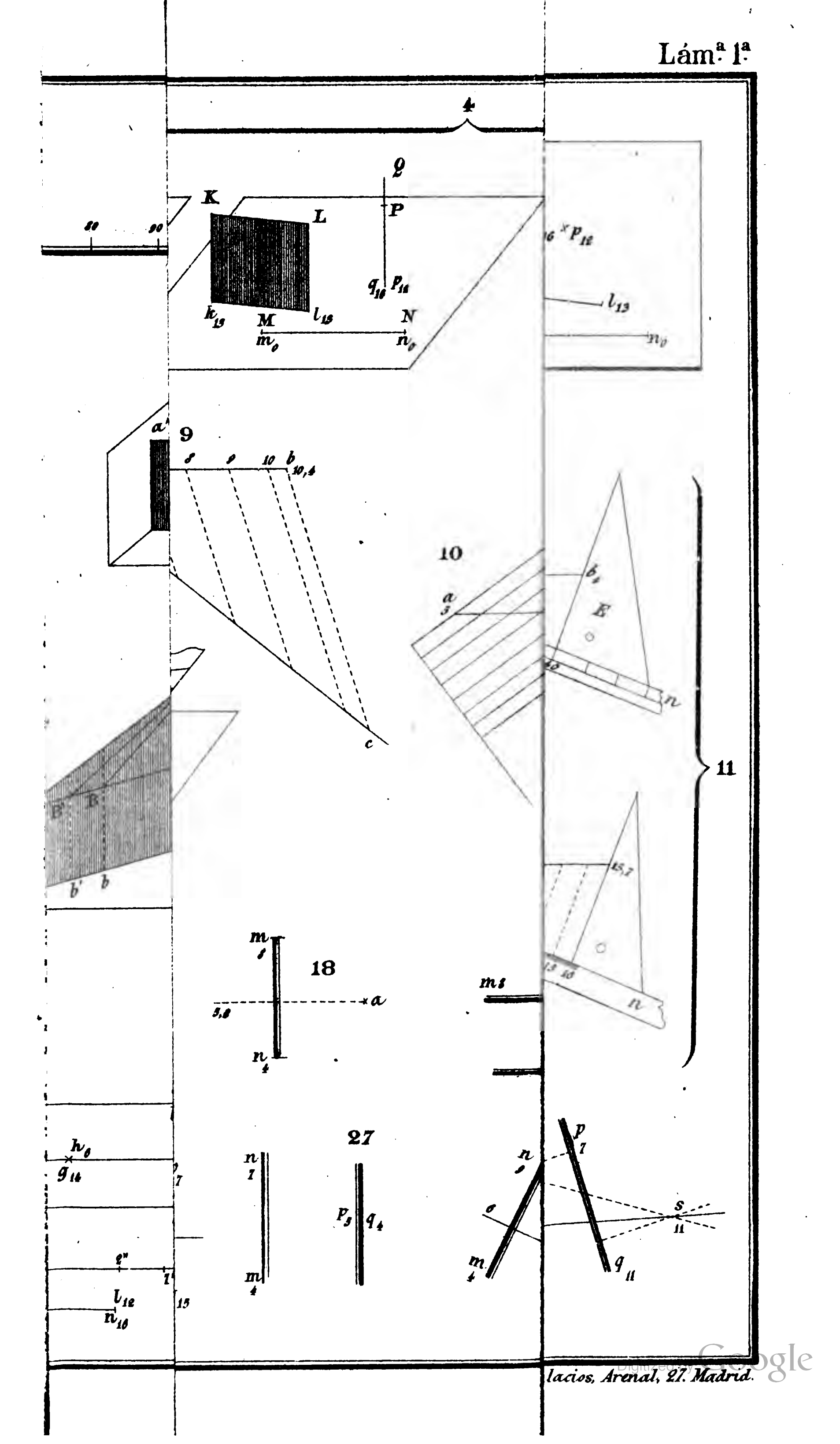
Planos tangentes á superficies geométricas.

1.° Conos y cilindros.

2.° Superficies cónicas y cilíndricas.

Planos tangentes y rasantes á superficies irregulares.

Plano tangente por un punto de la superficie.



lacios, Arenal, 27. Madrid.

